VISIT…

М. И. ШВИДЛЕР

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПОРИСТЫХ СРЕД

МОСКВА „НЕДРА" 1985

УДК 622.276.031:53

Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред.— М.: Недра, 1985. 288 с.

Рассмотрены задачи гидродинамики пористых сред, трактуемых как случайные поля. Приведено систематическое изложение методов решения задач фильтрации в неоднородных пористых средах, начиная с простейших одномерных течений до статистического анализа уравнений фильтрационного переноса в средах со случайными неоднородностями. Показаны пути использования статистической теории фильтрации для проектирования и анализа разработки нефтяных месторождений.

Для научных работников, занимающихся проектированием разработки и разработкой нефтяных месторождений, будет полезна студентам старших курсов нефтяных вузов, обучающихся по специальности «Технология и комплексная механизация разработки нефтяных и газовых месторождений».

Табл. 35, ил. 70, список лит.— 50 назв.

Рецензент: д-р техн. наук *В. Н. Николаевский* (ИФЗ АН СССР)

Ш $\frac{2504030300\text{-}109}{043(01)\text{-}85}$ 222-85

© Издательство «Недра», 1985.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Общепринята точка зрения, согласно которой неоднородность пористой среды оказывает существенное влияние на фильтрационные процессы. Известно также, что это влияние может не только в значительной степени определять количественные характеристики процесса фильтрации, но и менять в какой-то мере его «качество». Поэтому интерес к задачам о фильтрационных течениях в неоднородных средах постоянен на протяжении всей истории развития теории фильтрации. И хотя давно осознано, что естественные пористые среды обычно весьма неоднородны и структурно нерегулярны, тем не менее отсутствие адекватного аппарата на первых стадиях исследования приводило к анализу относительно простых ситуаций, когда принималось, что среды кусочно-однородные, областей сравнительно немного и они имеют простую форму. Такова, например, задача о течении в области с включением, проводимость которого отлична от проводимости области.

Появление аналоговых вычислительных устройств, ЭВМ и развитие численных методов решения задач фильтрации позволили существенно увеличить возможности изучения течений в неоднородных средах. Прогресс в этом направлении при современных темпах роста вычислительных возможностей представляется в перспективе нелимитированным, однако и здесь имеются принципиальные трудности, если ограничиться непосредственным расчетом течений в средах достаточно сложной структуры.

Положение начинает существенно изменяться по мере того, как при исследовании фильтрации в неоднородных средах используются статистический подход и трактовка пористых сред и фильтрационных процессов как случайных полей [5, 29, 35, 36, 27, 30, 45].

Прежде всего статистическая интерпретация позволяет применять эффективные методы описания нерегулярных структур при помощи характеристик, аккумулирующих всю или наиболее важную информацию о полях, например функции распределения, моменты, спектры и т. д. Под решением гидродинамической задачи в этом случае понимается установление связи между характеристиками заданных и искомых полей.

Конечно, статистическая интерпретация ставит совсем нетривиальные задачи определения статистических характеристик пористых сред, трактуемых как случайные поля. Возникают трудности интерпретации случайного решения, особенно в прикладных задачах.

Эти вопросы, а также некоторые относительно простые задачи фильтрации в средах со случайными неоднородностями рассмотрены в работе [35]. Развитие исследований показало, что любые традиционные задачи гидродинамической теории фильтрации

можно обобщить и сформулировать как стохастические в средах со случайными неоднородностями. Естественно, что новые задачи требуют адекватных методов решения, приводят к новым результатам и ставят, в свою очередь, новые проблемы, решение которых традиционными методами невозможно. Это позволяет говорить о специфическом направлении механики пористых сред — стохастической теории фильтрационных процессов.

Указанное положение в достаточной мере типично. Сравнительно давно сформировалась статистическая гидродинамика жидкости и газа [21], изучающая турбулентные течения. Практически в современный период возникли статистическая радиофизика [28], статистическая теория упругости [37], статистическая акустика и т. д. Заметим, что, если стохастический подход в макрофизике развивается сравнительно недавно, проблемы микрофизики в статистической и квантовой механиках с самого начала исследуются со статистических позиций. Возникает проблема установления того общего, что связывает перечисленные области науки со стохастической теорией фильтрации. Важно установить и в чем заключено ее своеобразие.

Начальное развитие стохастической теории фильтрации отмечено появлением достаточно большого количества работ, позволяющих определить ее место в комплексе наук, в методологии которых стохастический подход имеет фундаментальное значение. Цель этой книги — систематически изложить методы решения задач стохастической теории фильтрации, представить ее основные результаты, показать пути их практического использования при решении проблем прикладного характера.

ГЛАВА 1

СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Разнообразные примеры анализа фильтрационных процессов дают основание считать, что статистический подход — содержательное и плодотворное средство изучения явления переноса жидкостей и газов в неоднородных средах, позволяющее создать эффективные методы описания и прогноза фильтрационных процессов.

Остановимся кратко на практических аспектах применения статистических методов исследования фильтрационных течений в неоднородных средах, ограничившись при этом задачами, связанными с разработкой нефтяных месторождений.

Практика убедительно свидетельствует, что неоднородность пластов оказывает сильное влияние на происходящие в них процессы. Естественно, что теория проектирования и анализа разработки должна со всей возможной полнотой и точностью учитывать это обстоятельство. К сожалению, имеются принципиальные трудности, из которых отметим две главные.

Во-первых, истинная структура неоднородного пласта недоступна непосредственному изучению с необходимой детальностью. Она плохо изучена на ранних этапах исследования месторождения, в период проектирования его разработки. Заметим, что, вопреки иногда высказываемому мнению, пласт остается в значительной степени непознанным объектом и на поздней стадии разработки месторождения.

Во-вторых, современные методы проектирования и анализа разработки, созданные для расчета технологических показателей, не приспособлены для непосредственного учета деталей строения залежи. В частности, не удается учесть влияние отдельных включений, а также структуры неоднородности, если она достаточно сложна.

Указанные трудности целесообразно преодолевать следующим образом.

Во-первых, грубые детали структуры объекта разработки, доступные непосредственному наблюдению, например крупные зоны, на которые можно разбить пласт, уверенно выделяемые пласты или прослои отражаются в модели непосредственно. Во-вторых, мелкомасштабные детали в распределении проницаемости и пористости следует учитывать в рамках статистического подхода, вводя так называемые эффективные параметры — эффективную проницаемость, пористость, модифицированные фазовые проницаемости и т. д. Получение их связано с решением соответствующих фильтрационных задач в средах со случайными неоднородностями.

В практике проектирования такой подход в несколько измененном виде связан с рассмотрением сравнительно несложных расчетных моделей и введением ряда некоторых поправочных коэффициентов типа коэффициента охвата воздействием, коэффициента охвата заводнением и т. д. [15]. Такой подход практически приемлем, и вся проблема сводится к тому, насколько конкретно используемые коэффициенты адекватны строению залежи и осуществляемому процессу.

Прежде чем перейти к описанию предлагаемого способа учета неоднородности, целесообразно рассмотреть несколько подробнее строение реальных неоднородных объектов и возможные пути их моделирования. Естественно, что многообразие условий формирования залежей не позволяет описать достаточно просто и универсально неоднородную структуру. Далее под объектом будет пониматься однопластовая система, ограниченная уверенно выделяемыми реперами — покрышками, непроницаемыми для жидкости. Будем считать, что толщина системы мало меняется по площади, а неоднородность ее определяется изменчивостью коллекторских и емкостных параметров, т. е. проницаемости и пористости. Очевидно, их можно трактовать как функции трех переменных x, y, z.

Значительное влияние на интересующие нас процессы оказывают те области пласта, которые резко отличаются по проводимости или пористости от основной его части. Если исключить из рассмотрения области очень высокой проводимости, то наибольшее влияние на процесс оказывают области настолько низкой проводимости, что их, конечно, условно можно считать неколлектором. Будем полагать, что проницаемость таких областей равна нулю. Чрезвычайно важно знать пространственное расположение зон неколлектора, поскольку именно оно решающим образом влияет на процесс разработки. По-видимому, можно без больших погрешностей считать, что в пределах одного пласта, а именно этот случай мы и рассматриваем, доля неколлектора в объеме сравнительно невелика, во всяком случае меньше доли коллектора. В противном случае скорее всего этот пласт следовало бы расчленить на части, прослои или слои, в которых доля коллектора была бы больше доли неколлектора. Если к расчленению нет оснований, а неколлектор распределен хаотически, такой пласт вряд ли представляет собой объект, разработка которого целесообразна.

Таким образом, мы пришли к следующей схеме. Пласт представляет собой пространственное тело-коллектор, в котором распределены включения неколлектора. Говоря о теле-коллекторе, можно считать его, в свою очередь, неоднородным, например, можно выделить слои, зоны, которые могут быть неоднородными. Переходя к распределению в пространстве включений неколлектора, будем считать, что неколлектор представляет собой отложения глин либо сильно заглинизированных песчаников. Принято считать, что такие отложения соответствуют относительно спокойным частям бассейна, в котором происходило осадконакопление.

Естественно полагать, и это подтверждается непосредственными наблюдениями на обнажениях, а также изучением пластовых систем, что чем больше толщина глинистого слоя, тем в среднем больше и его другие размеры. Иными словами, существует положительная корреляция между временем сравнительно постоянного режима выноса материала и осадконакопления и размером области, на которой этот осадок распространен. Поэтому трудно ожидать такой ситуации, когда в достаточно мощном пласте существует зона — область неколлектора, толщина которой равна толщине всего пласта. С другой стороны, трудно ожидать такой ситуации, когда сравнительно маломощный слой неколлектора простирается на всей площади пласта или на значительной его части. Таким образом, естественно принять следующую схему. Неколлектор распределен в коллекторе в виде сравнительно тонких линз, как правило изолированных одна от другой. Тело коллектора является связным. Маловероятной представляется система, в которой часть пространства — коллектор со всех сторон окружена неколлектором. Если бы в таком коллекторе была нефть, было бы непросто объяснить, каким же образом она там оказалась. Для этого пришлось бы привлечь гипотезы, делающие такой случай не очень вероятным.

Приведенная в работе [48] информация о распределении непроницаемых слоев в кембрийских песчаниках, изученных на уступе обнажения зоны Хаггара и слагающих месторождение Хасси-Мессауд, представляет собой уникальный материал, характеризующий неоднородность реальной системы. Как указано в [48], маломощные глинистые прослои в песчаниках имеют очень небольшое распространение по площади (в среднем порядка 10 м). Поскольку эти прослои могут играть роль непроницаемых барьеров и, следовательно, влиять на циркуляцию закачиваемого газа, необходимо было определить их размеры. Отметим, что столь простые сведения, легко получаемые при полевой съемке, нельзя получить в результате бурения. Действительно, количество глинистых горизонтов в двух скважинах, пересекающих толщу, практически одинаково. Не располагая информацией о пространстве между скважинами, легко предположить, что эти глинистые горизонты коррелируются между собой и, следовательно, тянутся на многие сотни метров, тогда как изучение обнажений показывает, что это абсолютно неверно. Пример этот показывает, как опасно полагаться на корреляцию между скважинами независимо от того, о чем идет речь: о глинистых слоях или пластах другого типа.

Это высказывание, сделанное на основе изучения достаточно типичной и реальной ситуации, в определенной мере объясняет происхождение таких понятий, как линза, полулинза коллектора в теле неколлектора, вводимых в результате детальной корреляции тонких слоев или, как иногда говорят, зональных интервалов. По-видимому, такие конструкции являются в основном следствием используемого метода корреляции и интерполяции. Если к этому

добавить, что выделенные слои — зональные интервалы рассматриваются как плоские системы, т. е. игнорируется их гидродинамическое взаимодействие, а при расчетах движения внутри слоя — интервала применяются приближенные схемы, которые, как правило, усиливают влияние неколлектора, то, очевидно, в итоге гидродинамическая система становится предельно анизотропной, учет влияния неколлектора ориентирован на усиление его воздействия на процесс. Такой, как нам представляется, односторонний подход к построению моделей неоднородного поля и их анализу не дает возможности объективно оценить технологический процесс и его важнейшие параметры.

Возвращаясь к схемам, на наш взгляд, более приемлемым, будем считать пласт пространственным телом, локальная проводимость которого является случайным полем, масштабы корреляции которого достаточно малы по сравнению с характерными масштабами всей системы. Как уже говорилось, если есть основания выделить крупномасштабные неоднородности, то это должно быть сделано, и их влияние следует учесть в модели скорее всего детерминистически.

Для учета влияния мелкомасштабных неоднородностей следует использовать результаты решения соответствующих задач в средах со случайными неоднородностями. Перечислим основные этапы такой процедуры, отчетливо сознавая ее некоторую условность, порожденную расчленением общей задачи на части.

Для примера рассмотрим расчет характеристик разработки нефтяного пласта, вскрытого системой добывающих и нагнетательных скважин. Будем полагать, что рассматриваемый процесс достаточно хорошо описывается системой уравнений двухфазной фильтрации, а поскольку процесс достаточно интенсивен, не будем учитывать влияние капиллярных сил. Очевидно, учет мелкомасштабных неоднородностей в рамках развитой далее теории должен привести к расчетной модели, в которой фигурируют эффективные проницаемость и пористость, в уравнении переноса должны быть учтены дисперсионные эффекты. Расчетная модель должна позволять находить не только средние характеристики, но и флуктуации, по крайней мере, коэффициенты вариации искомых величин.

Таким образом, процедуру расчета можно представить в следующем виде.

Для оценки средних параметров течений следует определить эффективные параметры (проводимость или проницаемость) объекта. При этом необходимо учесть естественную для осадочных пород анизотропию, и, следовательно, вычислить тензор эффективной проводимости.

При вычислении эффективной пористости учитывается объем неколлектора, распределенного в пласте. Если доля неколлектора очень велика, вместе с неколлектором исключается и экранированный коллектор.

Следует найти эффективные или модифицированные фазовые проницаемости и вычислить дисперсионные члены уравнений переноса.

Решив полную систему уравнений двухфазной фильтрации с учетом неоднородностей малого масштаба, найдем средние дебиты или депрессии, среднюю насыщенность и т. д.

Для определения меры флуктуаций находятся коэффициенты вариации дебитов и депрессий.

Таким образом, в предлагаемой процедуре учитывается мелкомасштабная неоднородность в рамках традиционных моделей, дополненных эффективными параметрами. Результат расчетов — средние характеристики технологического процесса и коэффициенты вариации важнейших показателей — дебитов или депрессий.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОЛЯ

Как правило, при гидродинамическом анализе реальных пластовых систем мы располагаем сравнительно небольшой информацией об их свойствах. Существенно то, что объем информации можно увеличить в основном при бурении и исследовании новых скважин, что сопряжено с большими затратами. Поэтому расчетная схема реального процесса всегда носит некоторый, как правило значительный, элемент неопределенности, обусловленный неполнотой информации о пластовой системе, и, следовательно, в этих условиях «точное» предсказание фильтрационных процессов невозможно. Заметная хаотичность устройства порового пространства и его свойств, влияющих на течение жидкости, случайный механизм образования и эволюции пластовых систем, недостаточность информации требуют развития специального аппарата, который при анализе фильтрационных процессов учитывал бы специфичность изучаемых объектов. Совершенно естественно использовать для этой цели науку о случайных явлениях — теорию вероятностей и математическую статистику.

Однако следует подчеркнуть, что использование статистических методов предполагает построение внутренне непротиворечивой статистической модели фильтрационного процесса. Только ясность и четкость в построении такой модели дают возможность правильно оценить результаты, пределы применимости модели, ее истинное познавательное значение.

Нетривиальность рассматриваемой ситуации заключена в том, что сам по себе процесс фильтрации жидкости в фиксированной реальной системе вполне естественно в первом приближении считать детерминированным в том смысле, что многократное воспроизведение опытов в этой системе при одном и том же комплексе условий приводит к одним и тем же результатам (в пределах точности приборов, используемых в опытах). В то же время существенным представляется элемент случайности, заключенный в соотношениях имеющейся в нашем распоряжении информации о пласте с истинным, детерминированным в указанном смысле распределением его параметров, как правило неоднородным.

Поскольку источниками информации являются скважины, любые исследования, проводимые на реальной пластовой системе, можно разделить на локальные и интегральные.

Локальным считается исследование объекта в данной «точке», т. е. в некотором достаточно малом объеме, заключающем достаточно много компонентов структуры и тем самым допускающем устойчивое осреднение по совокупности компонентов. При определении пористости и проницаемости таким объемом, как правило, может служить керн. В некоторых случаях к локальным можно отнести каротажные исследования типа электрометрии. Обобщая, можно сказать, что локальными считаются исследования, проводимые с масштабом осреднения, значительно меньшим характерных размеров изучаемых фильтрационных полей. Опыт показывает, что локальные характеристики реальных объектов обычно довольно резко изменяются от одной «точки» пласта к другой. Поскольку локальные исследования проводятся только в скважинах, общий объем информации, полученной таким образом, чрезвычайно мал по сравнению с той информацией, которая при локальных исследованиях характеризует весь объект во всех «точках». Экстраинтерполяция по пространству локальных значений любого параметра может привести к грубым ошибкам в тех точках, для которых измерения отсутствуют.

Интегральные параметры пласта получают при помощи исследований на скважинах, используя при этом реальные крупномасштабные процессы движения жидкости или газа в пласте. Хотя характеристики процесса измеряются только в одной точке — скважине, протекание процесса в ней зависит от его хода во всей пластовой системе. Следовательно, при интерпретации нужно иметь в виду, что та или иная характеристика, полученная в результате анализа процесса, является «интегральной», а, точнее говоря, найденный параметр является функционалом, т. е. числом, зависящим от функций распределения искомого и других параметров по пространству. В этом случае масштабы осреднения сравнимы с характерными размерами изучаемого поля, и можно ожидать, что интегральные параметры содержательнее в информационном отношении, чем локальные. По своей сути интегральные параметры не являются локальными характеристиками, т. е. их нельзя приписать определенным точкам пространства, а если это делается, то следует учитывать всю условность такой операции.

Таким образом, методы исследования реальных пластовых систем и получаемые при их помощи параметры систем характеризуются существенно различными масштабами усреднения. Им сопутствуют случайные ошибки измерительных приборов и ошибки интерпретации. Отсюда вытекает, что результаты гидродинамического анализа фильтрационных процессов, использующего локальные либо интегральные параметры, будут более или менее грубо отражать свойства реального процесса и в какой-то мере носят случайный характер. Поэтому несомненный интерес представляет изучение случайных результатов расчета в зависимости от характера и полноты используемой информации и выявление связей и отношений расчетов такого рода с параметрами реального детерминированного потока. Изучение статистических свойств

расчетных параметров в зависимости от свойств исходной информации позволяет правильно оценивать результаты расчетов и естественнее принимать те или иные технологические решения, основанные на расчетах. Кроме того, такое изучение в принципе позволяет оценить тот уровень и качество информации, которые необходимы для получения расчетных параметров с заданной надежностью.

Следует отметить, что применение статистических методов расчета в данной ситуации, конечно, не является само по себе источником информации о реальных явлениях. Статистические методы, как и любой математический метод, служат для переработки информации, при этом выбранный метод должен как можно больше соответствовать специфике решаемых задач. В нашем случае статистические методы дают возможность количественно оценить информацию, определить меру «знания» одних предметов через аналогичные характеристики других, объективно связанных с первыми.

Важно иметь в виду следующую особенность вводимых в рассмотрение статистических моделей. Поскольку строится модель феноменологических характеристик в зависимости от изменчивости и изученности объекта исследования, вероятностные характеристики в определенном смысле отражают внешний по отношению к изучаемому объекту характер познания. Это иногда дает повод говорить о субъективности подобных вероятностных оценок [30], с чем, однако, трудно согласиться, поскольку введение вероятностных оценок детерминированных процессов объективно отражает степень их познания и в этом смысле является объективной мерой.

Описанная ситуация отнюдь не уникальна. Вероятностные методы широко применяются в теории обработки результатов измерений неслучайных объектов, если измерения сопровождаются случайными ошибками. Примером может служить гауссова теория ошибок.

Перейдем к построению статистической модели фильтрационного объекта, рассмотрев для простоты случай тонкого пласта постоянной толщины. Примем следующие допущения.

1. Проницаемость пласта зависит лишь от координат x, y (плоскость xoy совмещена с кровлей или подошвой плоского пласта) и не зависит от координаты z.

2. Проницаемость $k(x, y)$ — почти всюду непрерывная функция координат, принимающая неотрицательные значения.

Как уже говорилось, наиболее достоверная информация о проницаемости пласта получается в результате испытаний «макроточек» — кернов, извлеченных из пробуренных скважин (локальная информация) и при гидродинамических исследованиях на скважинах (интегральная информация).

Гидродинамические исследования — «прослушивание» и «самопрослушивание» сводятся к тому, что по известному, вводимому в пластовую систему возмущению и реакции системы на это

возмущение определяют некоторые свойства системы. Очевидно, в случае произвольной неоднородности однозначное определение этих свойств невозможно, так как возмущения вводятся локально (через скважины) и, что конечно является решающим, реакция системы на введенное возмущение также замеряется локально через те же скважины при «самопрослушивании» и через другие — при «прослушивании». Важным обстоятельством является также то, что параметры, характеризующие свойства системы, находятся по экспериментальным данным с использованием решений соответствующих обратных задач, выбранных на основании априорных оценок вида неоднородности.

Сделаем следующее замечание. В гидродинамических расчетах с использованием закона Дарси в дифференциальной форме фигурирует локальная проницаемость, т. е. параметр, характеризующий достаточно малую окрестность фиксированной точки. По-видимому, естественно принимать характерный размер этой окрестности d имеющим порядок сантиметров, поскольку таковы масштабы усреднения при определении проницаемости по керну. С другой стороны, при определении проницаемости по кривым восстановления давления (КВД), гидропрослушивания и т. д. мы получаем функционал, в котором локальная проницаемость усреднена с некоторым весом, зависящим от неизвестного распределения проницаемости. Можно предполагать, что порядок масштаба усреднения λ в этом случае аналогичен порядку характерных размеров пластовой системы l и, во всяком случае, он гораздо больше, чем d:

$$\lambda \sim l \gg d.$$

При оценке λ следует иметь в виду существенную особенность интегральных параметров пласта, получаемых с использованием КВД. Хотя, в принципе, на КВД в любой момент времени отражается распределение проницаемости во всей области, практически конечные изменения проницаемости можно зафиксировать лишь в том случае, если область измененной проницаемости попадает в некоторый круг (иногда его называют кругом освещенности), радиус R которого зависит от времени:

$$R = \alpha \sqrt{\chi t}.$$

Здесь α — безразмерный коэффициент порядка единицы; χ — коэффициент пьезопроводности пласта; t — время исследования.

Если положить к примеру $\chi = 10^4$ см$^2 \cdot$сек$^{-1}$, то исследования, проведенные в течение нескольких (шесть — восемь) часов, охватят область, радиус которой можно оценить в 200—300 м.

Интегральные параметры являются в некотором смысле эффективными характеристиками неоднородной системы (области), естественным образом аккумулировавшими в себе влияние локальной изменчивости поля проницаемости. Именно этот факт предопределяет важность использования интегральных параметров при гидродинамических расчетах.

Итак, гидродинамические исследования дают возможность определить интегральные параметры, характеризующие свойства некоторых областей. Естественно считать, что эти области следует как-то относить к точкам, в которых происходит сбор информации, т. е. скважинам. При этом дискретным значениям проницаемости условно приписываются адреса соответствующих скважин (x, y). В результате всех исследований мы получим сетку, покрывающую пласт, в узлах которой таким образом задана проницаемость. Значение $\hat{k}(x, y)$ между узловыми точками можно вычислить, интерполируя и экстраполируя сеточные значения k. Если способ экстраинтерполяции зафиксирован, то всюду (во всех точках пласта) определена функция $\hat{k}(x, y)$ — некоторое приближение истинного поля интегральной проницаемости.

Естественно предполагать, что окажись сетка скважин несколько иной, например сдвинутой, построенное приближение функции $\hat{k}(x, y)$ также оказалось бы, вообще говоря, иным. Именно в таком аспекте имеет смысл говорить о проницаемости как о случайной функции координат. В терминах теории случайных полей каждое представление функции $\hat{k}(x, y)$, единственное, как уже было условлено, при той или иной сетке скважин и методе экстраинтерполяции, назовем реализацией случайного поля $k(x, y)$. Бесконечное множество, или, как говорят, «ансамбль реализаций» и представляет собой случайное поле. Можно заметить, что условие статистической однородности генерации реализаций требует приблизительного постоянства плотности сетки скважин в каждой реализации.

Конструируя статистическую модель, соответствующую локальной информации, будем считать, что локальная проницаемость, измеренная в различных точках пласта, расположенных более или менее равномерно по области, образует совокупность чисел, которую удобно представить в виде гистограммы. Если выборка достаточно представительна, то, используя гистограмму, можно оценить среднюю проницаемость, меру разброса величин локальной проницаемости около средней и т. д. Так как локальная проницаемость изменяется чрезвычайно нерегулярно, ее знание в двух достаточно удаленных точках не дает практически никакой информации о проницаемости между ними. Можно полагать, что в точках, не охваченных экспериментом, проницаемость может оказаться любой из представленных на гистограмме. По-видимому, естественно считать, что более вероятны те значения, которые преобладают на гистограмме. Кроме того, значения проницаемости в близких точках пласта должны как-то зависеть одно от другого, поскольку гипотеза о непрерывности поля проницаемости почти всюду укладывается в представления о механизме образования и эволюции пористых сред. Отсюда следует, что используя локальную информацию, можно поставить в соответствие реальному

пласту мыслимую совокупность (ансамбль) пластов с гистограммами, совпадающими с гистограммой реального пласта. При этом в некоторых точках ансамбля пластов проницаемость может быть фиксированной (равной замеренной в соответствующей точке реального пласта). Как уже говорилось ранее, следует предполагать некоторую корреляцию значений проницаемости в различных точках каждого пласта из ансамбля, соответствующую аналогичному свойству реального пласта быть непрерывным почти всюду. Поскольку масштаб усреднения при локальных измерениях весьма мал по сравнению с размерами объекта, а локальные параметры изменяются чрезвычайно нерегулярно, статистическая локальная модель зависит от плотности источников информации (скважин) в той мере, в какой гистограмма, построенная по скважинным измерениям, отличается от гистограммы, соответствующей значениям локальной проницаемости всех «точек» пласта.

Считая поле проницаемости по каждому из пластов ансамбля реализацией случайного поля, мы и в случае локальной модели приходим к представлению о случайном поле проницаемости.

Как известно из прямых наблюдений, реальные пласты характеризуются существенной анизотропией, обусловленной механизмом осадконакопления. Наблюдаемая практически всегда слоистость существенно влияет на процесс фильтрации, особенно неоднородных жидкостей, и, безусловно, должна быть учтена при конструировании модели неоднородного пласта. Следует отметить, что слои разделены между собой достаточно тонкими практически непроницаемыми слоями или может быть простой переход от одного слоя к другому.

Для построения модели неоднородного слоистого пласта используется информация, полученная в результате изучения керна, геофизических, гидродинамических и, наконец, геологических исследований. Обычно данные исследований керна или геофизических исследований представляются в виде гистограммы. Данные гидродинамических исследований обычно используют для построения карт параметров.

Высказанные соображения позволяют сформулировать условия, определяющие модель. При этом, очевидно, для устранения многозначности в процедуре построения модели следует принять некоторые достаточно содержательные гипотезы о ее структуре.

Примем следующие допущения.

1. Пласт состоит из пропластков, достаточно различающихся своими свойствами (параметрами). Соседние пропластки могут быть:

а) разделены практически непроницаемыми тонкими прослоями;

б) стыковаться непрерывно.

2. В пределах пропластка пласт неоднороден как по простиранию, так и по толщине. Однако масштаб неоднородности по толщине сравним с толщиной пропластка. Поэтому считаем, что в пропластке проницаемость является двумерным случайным по-

лем. Кроме того, считаем, что масштаб корреляции (неоднородности) двумерного поля много меньше внешних характерных размеров пласта. Можно выделить и случай, когда масштаб неоднородности по толщине много меньше толщины пропластка. В этом случае проницаемость в пределах пропластка является трехмерным случайным полем. В обоих случаях пропласток характеризуется своей плотностью распределения $f_j(k)$.

3. Для построения модели используются данные керновых или геофизических исследований, т. е. мелкомасштабная информация, полученная из точек, достаточно хаотически (и в среднем равномерно) расположенных по объему пласта. Эта информация представлена в виде ряда, гистограммы или плотности распределения $f_0(k)$.

Задача заключается в том, чтобы привлекая дополнительные гипотезы о модели, на базе информации, доставляемой измерениями и $f_0(k)$, построить плотности $f_j(k)$ и найти те веса, с которыми они входят в f_0, а также, если это возможно, указать положение границ между пропластками.

Завершая этим изложение обоснования статистических моделей фильтрационных объектов, подчеркнем важность определенности истолкования смысла вводимых в рассмотрение понятий реализации случайного поля, ансамбля и т. д., их отношения к реальному объекту и процессу. Следует иметь в виду, что решая далее фильтрационные задачи в вероятностной постановке, мы должны будем истолковывать решения, полученные для ансамбля, и, конечно, от того, каким образом он (ансамбль) введен, будет зависеть интерпретация результатов.

В связи с этим следует остановиться на других вариантах обоснования стохастических моделей для анализа фильтрационных процессов в реальных средах. Например, принимая гипотезу о том, что процесс формирования пористых структур может считаться случайным, полагают, что изучаемая нами конкретная и, как показывает опыт, уникальная структура является реализацией некоторого случайного процесса, порождающего аналогичные структуры. Определив тем или иным способом вероятностные характеристики ансамбля по одной реализации, далее решают соответствующие фильтрационные задачи. Хотя в этой трактовке есть известная логика, она представляется недостаточно эффективной. При такой интерпретации теряется информационный аспект проблемы. Так, например, если единственная реализация известна во всех деталях и необходимость в вероятностной трактовке в принципе отпадает, хотя и не исключена совсем, указанный подход полностью правомерен.

Несколько отличен от описанного подход, согласно которому различными реализациями считаются части единственной реальной системы. Для эффективности такого подхода необходимо, чтобы неоднородность была пространственно достаточно мелкомасштабной по сравнению с размерами подсистем рассматриваемой системы. Если это условие не выполнено, то, как и в первом

случае, затруднительно интерпретировать результаты вероятностных расчетов, выполненных для всего ансамбля, в отношении рассматриваемого реального и уникального объекта.

Заметим, что в отличие от перечисленных подходов, наш способ введения ансамбля систем в случае, если единственная система известна точно, приведет к тому, что все члены ансамбля будут тождественными, а стохастическая модель станет детерминированной.

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

Вероятностная трактовка задач описания и исследования фильтрационных процессов неизбежно связана с использованием многих понятий и результатов теории вероятностей. Приводимая далее информация предназначена для того, чтобы напомнить о необходимых для дальнейшего изложения наиболее важных фактах этой теории.

Введем в рассмотрение понятие случайного эксперимента, т. е. такого эксперимента A, исход которого зависит от некоторого случайного механизма, степень влияния которого на результат эксперимента в принципе непредсказуема. Для дальнейшего важно (в этом заключено условие применимости теории вероятностей), что эксперимент, хотя бы в принципе, может быть воспроизведен, конечно со случайным исходом, неограниченное число раз. В этом случае представляют интерес вероятности некоторых событий, реализуемых при осуществлении эксперимента A. Исход случайного эксперимента обычно связывают с какими-то количественными характеристиками. Если эта характеристика — число, то ее называют случайной величиной. Вероятностное поведение случайной величины ζ характеризуют ее функцией распределения

$$F(x) = P\{\zeta \leqslant x\}, \tag{1.1}$$

определяемой как вероятность события, состоящего в том, что в данном эксперименте значение величины ζ не превысит числа x. Значение $F(x)$ позволяет вычислить вероятность того, что значение случайной величины ζ принадлежит какому-то определенному подмножеству множества действительных чисел, и в этом смысле $F(x)$ определяет вероятностные свойства случайной величины ζ. С этой же целью можно использовать и $f(x) = dF/dx$ — плотность вероятности случайной величины ζ.

Случайный эксперимент может быть связан не с одной, а с несколькими случайными величинами. В этом случае можно рассмотреть случайный вектор $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, где каждое ζ_i — случайная величина. Вероятностное поведение случайного вектора характеризуют совместной функцией распределения

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{\zeta_1 \leqslant x_1, \ldots, \zeta_n \leqslant x_n\}, \tag{1.2}$$

т. е. F — вероятность того, что ни одно ζ_i не превысит соответствующего x_i.

Конечные семейства случайных величин (случайная величина, случайный вектор) могут рассматриваться как частный случай произвольных семейств случайных величин. Пусть рассматривается семейство случайных величин $\{\zeta_t\}$, где t принадлежит некоторому множеству индексов T. Если T содержит лишь одну точку, $\{\zeta_t\}$ — случайная величина, а если множество T конечно, $\{\zeta_t\}$ — конечномерный случайный вектор. Более сложный случай, когда T — множество целых чисел, приводит к понятию бесконечномерного случайного вектора или, как говорят, случайного процесса с дискретным параметром — «временем». И, наконец, если T — интервал действительной оси, то семейство случайных величин называют случайным процессом с непрерывным параметром — «временем». Иными словами, случайный процесс с непрерывным временем — это случайная функция, определенная на множестве T. Результатом эксперимента для этой модели является некоторая обычная функция, заданная на множестве T. Ее принято называть реализацией, или выборочной функцией.

Вероятностное поведение случайной функции $\zeta(t)$ определяется семейством конечномерных распределений

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P\{\zeta(t_1) \leqslant x_1, \ldots, \zeta(t_n) \leqslant x_n\}, \quad (1.3)$$

где $t_1, \ldots, t_n$ — произвольное конечное множество значений t, а $n = 1, 2, \ldots$

Конечномерные распределения случайной функции должны удовлетворять условиям согласованности и симметрии [7].

Если случайная функция зависит более чем от одного аргумента, говорят о случайном поле в пространстве аргументов, каковым обычно в физических задачах являются время t и пространственные координаты x, y, z.

Случайное поле может описываться не одной, а несколькими случайными функциями, т. е. являться случайным векторным полем, как например скорость фильтрации. Очевидно, случайное поле может являться и тензором некоторого ранга.

Пусть $M(t, \vec{r})$ — точка в четырехмерном пространстве — времени. Полное задание скалярного случайного поля $\zeta(M)$ означает, что известны все его n-мерные ($n = 1, 2, \ldots$) плотности вероятностей, т. е. для любого числа n произвольно выбранных точек M, известны функции

$$f_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1, \ldots, d\zeta_n = P\{\zeta_\nu \leqslant \zeta(M_\nu) \leqslant \zeta_\nu + d\zeta_\nu\}, \quad (\nu = 1, \ldots, n), \quad (1.4)$$

где $P\{\zeta_\nu \leqslant \zeta(M_\nu) \leqslant \zeta_\nu + d\zeta_\nu\}$ — вероятность того, что случайная величина $\zeta(M)$ лежит в интервале $(\zeta, \zeta + d\zeta)$, а f_n подчинены условиям неотрицательности, симметрии, согласованности и нормировки. Аналогично определяются векторное и тензорное случайные поля.

Важный класс случайных полей — поля, характеристики которых инвариантны относительно преобразования сдвига и вращения. Скалярное поле ζ называется однородным (в узком смысле), т. е.

стационарным по времени t и однородным по x, y, z, если все n-мерные плотности вероятности инвариантны относительно преобразования сдвига $M \to M + \Delta M$

$$P\{\zeta_\nu \leqslant \zeta(M_\nu + \Delta M) < \zeta_\nu + d\zeta_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n\} = P\{\zeta_\nu \leqslant \zeta(M_\nu) \leqslant \zeta_\nu + d\zeta_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n\}. \tag{1.5}$$

Очевидно, поля могут быть однородными по части независимых переменных. Например, поле может быть однородным по времени (стационарные поля), но неоднородным по пространственным переменным. Возможен и обратный случай — поле однородно по пространству, но нестационарно. Наконец, может иметь место случай однородности по части пространственных переменных.

Следует отметить, что использование плотности вероятности — не единственный способ полного описания случайных величин или функций. В последнее время при исследовании проблем турбулентности [21] и статистической радиофизики [13, 31] применяется метод описания, основанный на задании случайных объектов при помощи характеристических функций и характеристических функционалов, а также аппарата вариационного (функционального) дифференцирования. Примеры применения такого подхода будут приведены в главе 10.

Моменты случайных полей

Для полного описания случайных полей требуется задать все многомерные распределения на всевозможных множествах точек пространства и времени. Нахождение таких распределений в практических ситуациях сопряжено с большими трудностями, поскольку требует большого объема экспериментальной информации и высокой точности при ее обработке. Поэтому при решении конкретных задач часто ограничиваются изучением более простых вероятностных параметров случайных полей, например моментов. В общем случае моменты — функции координат. Во многих случаях достаточную информацию доставляют моменты первого и второго порядков, с которыми оперирует корреляционная теория случайных полей.

Момент первого порядка (математическое ожидание или среднее значение) определяется при помощи одномерной плотности вероятностей $f_1(\zeta)$

$$<\zeta(\vec{M})> = \int \zeta f_1(\zeta)\, d\zeta. \tag{1.6}$$

Флуктуация поля, т. е. его отклонение от среднего поля, определяется так

$$\zeta'(\vec{M}) = \zeta(\vec{M}) - <\zeta(\vec{M})>. \tag{1.7}$$

Для вычисления моментов второго порядка необходима двумерная плотность вероятностей $f_2(\zeta_1, \zeta_2)$. Смешанный момент второго порядка поля ζ вычисляется по формуле

$$B_\zeta(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2) = <\zeta(\vec{M}_1)\ \zeta(\vec{M}_2)> = \iint \zeta_1, \zeta_2 f_2(\zeta_1\zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (1.8)$$

Смешанный момент второго порядка поля флуктуации называется корреляционной (автокорреляционной) функцией

$$K_\zeta(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2) = <\zeta'(\vec{M}_1)\,\zeta'(\vec{M}_2)>. \quad (1.9)$$

Функции B_ζ и K_ζ связаны соотношением

$$K_\zeta(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2) = B_\zeta(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2) - <\zeta(\vec{M}_1)><\zeta(\vec{M}_2)>, \quad (1.10)$$

кроме того, они симметричны относительно своих аргументов M_1, M_2:

$$B_\zeta(\vec{M}_1, \vec{M}_2) = B_\zeta(\vec{M}_2,\ \vec{M}_1),\ K_\zeta(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2) = K_\zeta(\vec{M}_2,\ \vec{M}_1). \quad (1.11)$$

Корреляционная функция $K_\zeta(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2)$ является положительно определенной, т. е.

$$\iint K_\zeta(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2)\,\varphi(\vec{M}_1)\,\varphi(\vec{M}_2)\, dV_1 dV_2 \geqslant 0, \quad (1.12)$$

где $\varphi(\vec{M})$ — произвольная функция; dV_1, dV_2 — элементы объема в пространствах $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$; W — произвольная область интегрирования в пространстве $\vec{M}_1 \times \vec{M}_2$.

Дисперсия случайного поля $D[\zeta]$ определяется как

$$D[\zeta] = \sigma_\zeta^2(\vec{M}) = <\zeta'^2(\vec{M})> = <[\zeta(\vec{M}) - <\zeta(\vec{M}>]^2> = \\ = K_\zeta(\vec{M},\ \vec{M}). \quad (1.13)$$

Важным показателем изменчивости поля служит коэффициент вариации

$$\eta_\zeta(\vec{M}) = \sigma_\zeta(\vec{M})/<\zeta(\vec{M})>. \quad (1.14)$$

Многомерное случайное поле $\zeta^{(i)}(\vec{M})$ в корреляционной теории характеризуется средними индивидуальных полей $<\zeta^{(i)}(\vec{M})>$ и корреляционной матрицей

$$K_{ij}(\zeta,\ \vec{M}_1,\ \vec{M}_2) = <\zeta'^{(i)}(\vec{M}_1)\,\zeta'^{(j)}(\vec{M}_2)>. \quad (1.15)$$

В корреляционной матрице диагональные элементы — автокорреляционные функции, остальные элементы — функции взаимной корреляции. Нормируя элементы корреляционной матрицы, получим матрицу коэффициентов корреляции $\lambda_{ij}(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2)$.

$$\lambda_{ij}(\vec{M}_1, \vec{M}_2) = K_{ij}(\vec{M}_1,\ \vec{M}_2)/\sigma_{\zeta i}(\vec{M}_1)\,\sigma_{\zeta j}(\vec{M}_2). \quad (1.16)$$

Все коэффициенты корреляции удовлетворяют условию

$$|\lambda_{ij}| \leqslant 1.$$

Перейдем к рассмотрению случайных полей, зависящих только от пространственных координат x, y, z, определяющих радиус-

вектор $\vec{r}$. Если такое случайное поле статистически однородно (в широком смысле), его моменты первого и второго порядков инвариантны относительно преобразования сдвига $\vec{r} \to \vec{r} + \Delta\vec{r}$, т. е.

$$<\zeta(\vec{r})> = <\zeta(\vec{r} + \Delta\vec{r})>, \tag{1.17}$$

$$K_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = K_\zeta(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, \ \vec{r}_2 + \Delta\vec{r}), \tag{1.18}$$

а это означает, что $<\zeta(\vec{r})> = \text{const}$, а корреляционная функция зависит от $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, но не от $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в отдельности.

Для однородного случайного поля

$$K_\zeta(\vec{r}) = <\zeta'(\vec{r}_1)\,\zeta'(\vec{r}_1 - \vec{r})>. \tag{1.19}$$

Дисперсия однородного случайного поля постоянна $D[\vec{r}] = \text{const}$. Статистически однородные случайные поля, у которых K_ζ зависит только от модуля (но не направления) вектора $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, называются статистически изотропными. Для статистически изотропных полей $\zeta(\vec{r})$

$$K_\zeta(\vec{r}) = K_\zeta(r), \quad r = |\vec{r}|. \tag{1.20}$$

Очевидно, корреляционная функция изотропного поля — четная функция координат.

В приложениях для характеристики изотропных полей часто используют корреляционные функции

$$K_\zeta(r) = \sigma_\zeta^2 \exp(-r/a), \tag{1.21}$$

$$K_\zeta(r) = \sigma_\zeta^2 \exp(-r^2/a^2). \tag{1.22}$$

Для аппроксимации эмпирических корреляционных функций, по мере затухания меняющих свой знак, используют выражения

$$K_\zeta(r) = \sigma_\zeta^2 \exp(-r/a)\cos br, \tag{1.23}$$

$$K_\zeta(r) = \sigma_\zeta^2 \exp(-r^2/a^2)\cos br. \tag{1.24}$$

При этом следует проверять, являются ли выбранные аппроксимации корреляционными функциями, т. е. являются ли они положительно определенными. Некоторые подробности, связанные с этим, будут приведены далее при изложении основных фактов спектральной теории случайных полей. Полезной характеристикой случайного поля является так называемый эффективный масштаб a^*

$$a^* = \frac{1}{\sigma_\zeta^2}\int K_\zeta(r)\,dr, \tag{1.25}$$

совпадающий по порядку величины с расстоянием, на протяжении которого еще сохраняется заметная корреляционная связь между значениями поля в двух точках. Для функции (1.21) эффективный масштаб $a^* = a$, для корреляции (1.22) $a^* = a\sqrt{\pi/2}$.

Корреляционная функция может обладать несколькими характерными масштабами. У статистически однородных, но анизотропных полей корреляционные функции зависят не только от модуля вектора $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, но и от его направления. Характерные масштабы, на которых значения анизотропного случайного поля становятся некоррелированными, различны по разным направлениям. С примерами таких полей мы встретимся при рассмотрении фильтрационных течений в анизотропных средах.

Теоретически статистические характеристики случайных процессов и полей следует определять, усредняя нужные величины по всем реализациям процесса или поля. Практически же обычно при построении характеристик усреднение проводится по времени или по одной протяженной реализации поля. Для законности такого усреднения необходимо выполнение так называемого условия эргодичности. Суть его для случайных функций времени состоит в том, что для надежного определения средних интервал усреднения должен быть много больше, чем «время» корреляции, определяемое по формуле (1.25), где под K следует понимать корреляционную функцию случайного процесса.

Аналогично обстоит дело и в случае полей. Если ввести понятие объема корреляции, величина которого определяется как

$$V^* = \sigma_\zeta^{-2} \int K_\zeta(\vec{r})\, dr^n,$$

то для замены теоретико-вероятностного усреднения усреднением по объему необходимы конечность объема корреляции и выбор объема усреднения, много большего объема корреляции.

Если случайное поле однородно в пространстве трех измерений, то оно однородно и на любой плоскости или прямой. Поэтому усреднение по объему можно заменить в этом случае усреднением по площади или интервалу, принадлежащим соответствующим плоскостям или прямым при условии, что выполнены соответствующие условия эргодичности.

Спектры однородных случайных полей

Подобно тому как обычные детерминированные функции представляются суперпозицией гармоник в виде ряда или интеграла Фурье, однородные случайные поля представимы в виде интеграла Фурье — Стильтьеса

$$\zeta(\vec{r}) = \int e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}}\, dz(\vec{\varkappa}). \tag{1.26}$$

Здесь интеграл распространен по всему пространству волновых векторов $\vec{\varkappa}$.

Пусть $\langle \zeta(\vec{r}) \rangle = 0$, где ζ — скалярное вещественное поле такое, что

$$\int |K_\zeta(\vec{r})|\, d\vec{r} < \infty. \tag{1.27}$$

Тогда случайные амплитуды $dz(\vec{x})$ волн $e^{i\vec{x}\vec{r}}$ обладают свойствами

$$dz(-\vec{x}) = \overline{dz(\vec{x})}, \tag{1.28}$$

$$\langle dz(\vec{x}) \rangle = 0, \tag{1.29}$$

$$\overline{\langle dz(\vec{x})\, dz(\vec{x}_1) \rangle} = \delta(\vec{x} - \vec{x}_1)\, \Phi(\vec{x})\, d\vec{x} d\vec{x}_1. \tag{1.30}$$

Здесь черта над символом означает комплексную сопряженность: $\delta(\vec{x})$ — многомерная дельта-функция Дирака; $\Phi(\vec{x})$ — многомерная спектральная плотность или многомерный спектр.

Из (1.26) и (1.30) следует, что однородное случайное поле $u(\vec{r})$ можно аппроксимировать сколь угодно точно суммой некоррелированных между собой плоских волн различных длин и ориентаций со случайными амплитудами и фазами.

Из формул вытекает, что

$$K_\zeta(\vec{r}) = \int e^{i\vec{x}\vec{r}} \Phi(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{1.31}$$

и, наоборот,

$$\Phi(\vec{x}) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\vec{x}\vec{r}} K_\zeta(\vec{r})\, d\vec{r}. \tag{1.32}$$

Здесь $n = 1, 2, 3$ соответственно для одномерных, двумерных и трехмерных пространств, в которых определены векторы $\vec{r}$ и $\vec{x}$. Таким образом, спектральная плотность является трансформантой Фурье корреляционной функции, и наоборот.

Для того чтобы $K_\zeta(\vec{r})$ являлась корреляционной функцией некоторого случайного поля (однородного), необходима неотрицательность соответствующей спектральной плотности.

В случае многомерного однородного случайного поля

$$\zeta(\vec{r}) = \{\zeta^1(\vec{r}),\ \zeta^2(\vec{r}),\ \ldots,\ \zeta^n(\vec{r})\},\ \langle \zeta^j(\vec{r}) \rangle = 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

$$\zeta^j(\vec{r}) = \int e^{i\vec{x}\vec{r}} dz_j(\vec{x}). \tag{1.33}$$

При этом

$$dz_j(-\vec{x}) = \overline{dzj(\vec{x})}, \tag{1.34}$$

$$\langle dz_j(\vec{x}) \rangle = 0, \tag{1.35}$$

$$\overline{\langle dz_j(\vec{x}) dz_l(\vec{x}_1) \rangle} = \delta(\vec{x} - \vec{x}_1)\, \Phi_{jl}(\vec{x})\, d\vec{x} d\vec{x}_1, \tag{1.36}$$

а $K_{jl}(\vec{r}) = \langle \zeta^j(\vec{x})\ \zeta^l(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$ — взаимные корреляции компонент поля должны достаточно быстро убывать на бесконечности.

Из (1.33) и (1.36) вытекает, что

$$K_{jl}(\vec{r}) = \int e^{i\vec{x}\vec{r}} \Phi_{jl}(\vec{x})\, d\vec{x} \tag{1.37}$$

и, следовательно,

$$\Phi_{jl}(\vec{\varkappa}) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r}} K_{jl}(\vec{r})\, d\vec{r}. \tag{1.38}$$

Так как $K_{jl}(\vec{r})$ — действительные функции и $K_{il}(\vec{r}) = K_{lj}(-\vec{r})$, взаимные спектры Φ_{jl} полей $\zeta^j(\vec{r})$ и $\zeta^l(\vec{r})$ удовлетворяют условиям

$$\Phi_{jl}(\vec{\varkappa}) = \overline{\Phi_{lj}(\vec{\varkappa})}. \tag{1.39}$$

Матрица $\Phi_{jl}(\vec{\varkappa})$ является эрмитовой и неотрицательно определенной.

В частном случае однородного изотропного поля $K_\zeta(\vec{r}) = K_\zeta(r)$. Перейдя в (1.32) к сферическим координатам и выполнив интегрирование по углам, получим при $n = 3$

$$\Phi(\vec{\varkappa}) = (2\pi^2\varkappa)^{-1} \int_0^\infty \sin \varkappa r K_\zeta(r)\, r dr = \Phi(\varkappa), \tag{1.40}$$

$$K_\zeta(r) = (4\pi/r) \int_0^\infty \sin \varkappa r \Phi(\varkappa)\, \varkappa d\varkappa, \tag{1.41}$$

т. е. спектр и корреляционная функция связаны синус-преобразованием Фурье.

При $n = 2$ следует перейти к полярным координатам, что после интегрирования по полярному углу дает

$$\Phi(\varkappa) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty J_0(\varkappa r) K_\zeta(r)\, r dr, \tag{1.42}$$

$$K_\zeta(r) = 2\pi \int_0^\infty J_0(\varkappa r) \Phi(\varkappa)\, \varkappa d\varkappa, \tag{1.43}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, для изотропных полей на плоскости связь спектра и корреляционной функции реализуется преобразованием Ханкеля.

В случае произвольного n имеем соотношения

$$\Phi(\varkappa) = (2\pi)^{-n/2} \varkappa^{-(n-2)/2} \int_0^\infty K_\zeta(r) J_{(n-2)/2}(\varkappa r)\, r^{n/2} dr,$$

$$K(r) = (2\pi)^{n/2} r^{-(n-2)/2} \int_0^\infty \Phi(\varkappa) J_{(n-2)/2}(\varkappa r)\, \varkappa^{n/2} d\varkappa.$$

В трехмерном пространстве функциям (1.21), (1.22) соответствуют, очевидно, неотрицательные спектры

$$\Phi(\varkappa) = \frac{\sigma_\zeta^2 a^3}{\pi^2 (1 + \varkappa^2 a^2)^2}, \tag{1.44}$$

$$\Phi(\varkappa) = \frac{\sigma_\zeta^2 a^3}{8\pi^{3/2}} e^{(-\varkappa^2 a^2)/4}. \tag{1.45}$$

Таким образом, функции (1.21), (1.22) действительно являются корреляционными функциями трехмерных изотропных полей. В то же время функция (1.23) является корреляционной лишь при определенном соотношении ее параметров. Так, в случае трехмерного поля для этого необходимо, чтобы $\sqrt{3}ab < 1$. Для полей на плоскости нужно, чтобы $ab<1$. И лишь для одномерных полей ограничений на параметры a и b нет [21].

ЭМПИРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Вероятностная трактовка неоднородных объектов как случайных полей естественно приводит к необходимости оценки соответствующих характеристик полей, например моментных функций. Специфика рассматриваемой проблемы состоит в том, что для такого анализа можно воспользоваться лишь одной реализацией случайного поля, как правило, дискретной. Однако практически реализуя в достаточной степени стандартные процедуры построения эмпирических характеристик случайных полей, следует учитывать некоторые особенности моделей (интегральной и локальной), введенных ранее. Прежде всего следует исходя из количества и качества информации о реальном объекте разумно ограничить количество вычисляемых характеристик. Обычно на практике приходится ограничиться определением среднего поля и автокорреляционной функции. Как правило, надежное определение более высоких разноточечных моментов по эмпирической информации исключено.

Наибольшие трудности представляет нахождение по экспериментальным данным среднего поля или, как его иногда называют, тренда. В этом случае при сглаживании единственной реализации, особенно если есть основания считать тренд непостоянным, операция сглаживания должна проводиться с учетом особенностей рассматриваемых статистических моделей. Так, в частности, при построении тренда интегральной модели масштаб скользящего усреднения должен выбираться с учетом величины радиуса освещенности. Естественно, что при этом области освещенности отдельных скважин могут как-то перекрываться внутри области сглаживания.

Определив так или иначе тренд и, следовательно, найдя флуктуации поля, можно, предположив, что флуктуации являются однородными полями, найти дисперсию поля. Считая поле изотропным, можно построить эмпирическую корреляционную функцию $K^*(r)$ и, если это полезно, аппроксимировать ее удобной для последующих вычислений функцией. Примеры таких построений приведены в [35], где обработаны результаты гидродинамических исследований проницаемости по пластам ДIV Шкаповского нефтяного месторождения, ДI Бавлинского нефтяного месторождения (рис. 1) и месторождению Жирное. Их анализ показывает, что интегральным моделям реальных объектов соответствуют сравни-

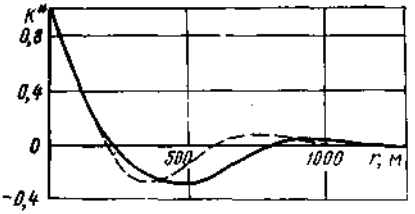


Рис. 1. Эмпирическая нормированная корреляционная функция проницаемости для пласта Д1 Бавлинского нефтяного месторождения (сплошная линия) и ее аппроксимация (пунктир) по (1.23)

тельно малые по отношению к среднему полю средние квадратические отклонения. Так, по Шкаповскому месторождению средний коэффициент вариации проницаемости составляет примерно 0,2, по Бавлинскому 0,3. Коэффициент вариации проницаемости Жирновского месторождения несколько выше и составляет около 0,6. Для всех примеров характерно, что на расстояниях порядка 500 м корреляция интегральной проницаемости несущественна. Это становится понятным, если учесть, что таков же порядок радиуса освещенности при гидродинамических исследованиях с помощью КВД. По-видимому, интегральным моделям свойственны отмеченные особенности, и можно считать, что качество используемой информации приводит к относительно малым вариациям признаков и масштабам корреляции, имеющим порядок размеров области освещенности — области усреднения, реализуемой в конкретном способе получения интегральной информации.

Коротко остановимся на способах обработки локальной информации. Как уже упоминалось ранее, располагая достаточно представительными замерами какой-либо локальной характеристики (проницаемости, пористости и т. д.), можно построить функцию ее распределения и вычислить одноточечные моменты (среднее значение, дисперсию и т. д.). Для использования этой информации в рамках корреляционной теории случайных полей необходимо иметь сведения о корреляционных связях локальных характеристик в различных точках. Поскольку локальные измерения обычно проводятся в точках, значительно удаленных одна от другой, то установить на основании подобной информации, каковы корреляционные связи, не удается. Выход, по-видимому, заключается в использовании всех сведений о характере образования и эволюции данной пластовой системы, об изменчивости геолого-физических характеристик данного или подобных пластов. Большое значение имеют, к сожалению, немногочисленные измерения на обнажениях или на достаточно больших образцах, дающих представление о пространственной изменчивости свойств реальной пористой среды [40, 48]. Вся эта информация позволяет в каждом отдельном случае принять гипотезу о порядке радиуса корреляции. Так, например, при анализе проницаемости девонских пластов есть основания считать, что радиус корреляции лежит в интервале от десятых долей метра до нескольких метров, что значительно меньше характерных размеров пластовой системы. И в то же время этот масштаб соизмерим с важнейшим характерным масштабом разрабатываемого пласта — радиусом скважины, который, особенно

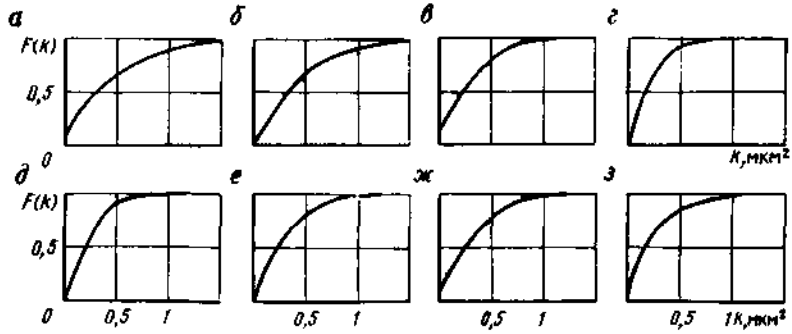


Рис. 2. Эмпирические функции распределения локальной проницаемости.

Месторождение: *а* и *б* — Туймазинское, пласты ДI и ДII соответственно; *в* и *г* — Серафимовское, пласты ДI и ДII соответственно; *д* — Константиновское, пласт ДII; *е* — Леонидовское, пласт ДI; *ж* и *з* — Шкаповское, пласты ДI и ДIV соответственно

с учетом несовершенства вскрытия пласта, всегда имеет порядок, не превышающий сантиметра.

Анализ фактического материала по многим месторождениям показывает, что распределения локальных параметров, в частности проницаемости, асимметричны, во многих случаях они близки к логарифмически нормальному распределению, для них характерен коэффициент вариации, имеющий порядок единицы. Так, например, по данным БашНИПИнефти, коэффициент вариации локальной проницаемости по пласту ДI Туймазинского месторождения составляет 1,22, а по пласту ДII — соответственно 0,88. Для пластов ДI и ДIV Шкаповского нефтяного месторождения этот коэффициент имеет значения 1,33 и 1,18. Таков же порядок коэффициента вариации по девонским пластам Серафимовского, Константиновского и Леонидовского нефтяных месторождений (рис. 2).

Таким образом, интегральная и локальная модели реальных объектов характеризуются следующим образом: интегральной модели соответствуют относительно малые коэффициенты вариации и большие масштабы (радиусы) корреляции; локальной модели соответствуют большие коэффициенты вариации и малые масштабы корреляции.

Несколько слов о методах построения статистических моделей слоистых систем по локальной информации. В соответствии с условиями, определяющими слоистую структуру, примем, что одномерную плотность распределения проницаемости в каждом пропластке можно представить функцией $f(k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где f — одна и та же для всех пропластков, параметры α_i определяют точку α некоторого множества A в n-мерном пространстве. Идентичность функции для всех пропластков определяет некоторое подобие их строения, происхождения и т. д. Значения параметра-вектора α определяет их количественное различие.

Если пласт состоит из N частей, пропластки которых существенно различаются по структуре, можно ввести $f_i(k, \alpha)$ — плотности для частей и p_i — доли частей, а под f понимать

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_i(k, \alpha)\, p_i. \tag{1.46}$$

При этом естественно считать, что α — вектор, компоненты которого являются моментами распределений по пропласткам.

Совокупность измерений проницаемости, послужившая для построения плотности $f_0(k)$, есть «смесь», в которой представлены пропластки, описанные выше. Пусть $\psi(\alpha)$ — плотность распределения вектора α по пропласткам. Тогда $\psi(\alpha)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода с положительным и нормированным (стохастическим) ядром

$$\int_A f(k, \alpha)\, \psi(\alpha)\, d\omega_\alpha = f_0(k) \tag{1.47}$$

при условии нормировки ψ как плотности

$$\int_A \psi(\alpha)\, d\omega_\alpha = 1, \quad \psi(\alpha) \geqslant 0. \tag{1.48}$$

Здесь $d\omega_\alpha$ — элемент объема пространства A.

Если функции f_0 и f заданы, решение (1.47) определит искомое распределение параметров α по пропласткам. Задача эта, как известно, некорректна в том смысле, что малым погрешностям f_0 могут соответствовать большие погрешности в ψ. Однако выбор подходящего способа регуляризации позволяет получить устойчивое решение.

Очевидно, успех в разделении «смеси» на компоненты существенно зависит от правильного выбора типа распределений $f(k, \alpha)$, уровня погрешности в определении плотности $f_0(k)$. Можно ожидать, что выбор плотности $f(k, \alpha)$ будет достаточно обоснованным при привлечении геологической информации, наличии достаточной статистики по объектам, строение и происхождение которых близки к изучаемому. Иными словами, такой выбор должен быть не формальным, хотя, конечно, некоторый элемент произвола здесь неизбежен.

Задача о построении пространственных границ, разделяющих подобласти (пропластки) с различными плотностями распределения каких-либо локальных параметров, значительно сложнее и может включать в себя задачу о разделении смеси как частный этап. Методы решения пространственной задачи в такой постановке и соответствующая библиография приведены в работе [6].

Итак, недостаток информации о реальной системе привел нас к рассмотрению статистических моделей. При этом оказалось, что и статистические модели можно описать на базе эмпирических данных лишь приближенно, например, приходится принимать гипотезы о масштабе корреляции в случае локальной модели, о виде корреляционной функции и т. д. Небезосновательно сомнение в целесообразности статистического подхода в такой ситуации.

Однако, как будет видно из дальнейшего, изучение гидродинамических процессов в средах со случайными неоднородностями показывает: существо проблемы заключено в том, что во многих случаях результаты решения таких задач достаточно слабо зависят от тех деталей моделей, которые трудно достоверно оценить по эмпирическим данным и, напротив, в более существенной степени зависят от достоверно определяемых характеристик.

ГЛАВА 2

СТАЦИОНАРНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Эта глава посвящена исследованию относительно простых и в то же время достаточно важных для теории и практики задач фильтрации однородной жидкости в стохастических средах. Полагая, что постановка таких задач является естественным обобщением соответствующих детерминированных задач, обсудим вопрос о возможных путях их решения.

Безотносительно к методу решения возникает вопрос о трактовке и использовании полученных результатов при решении практических задач. В этом случае в зависимости от используемой информации и конкретной решаемой задачи возможны различные подходы к интерпретации результатов [35, 30]. Суть проблемы заключена в том, что для оценки единственного и часто уникального объекта со сложной и нерегулярной внутренней структурой мы рассматриваем множество (ансамбль) подобных объектов. Решив соответствующую задачу, определяем характеристики всего ансамбля и хотим их использовать для оценки упомянутого единственного объекта. Конечно, такая задача не может иметь единственное решение. Как и в [35] полагаем, что вероятности того или иного исхода порождены недостаточностью исходной информации. Как будет видно из дальнейшего, такая ситуация не всегда имеет место. Рассматривая фильтрацию в средах с мелкомасштабными неоднородностями, мы приходим к результатам, слабо варьирующим около средних значений. В этом случае оценки для ансамбля систем можно с высокой точностью отнести к реальной единственной системе. Так, например, обстоит дело при вычислении эффективной проводимости сред с мелкомасштабными неоднородностями.

Рассмотрение задач стационарной фильтрации, естественно, необходимо начать со случая одномерных течений в конечной области. Методом возмущений найдены средний дебит и дисперсия дебита. Оценка точности приближенного решения в специальном случае, допускающем точное решение, показывает его приемлемость.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Трактовка неоднородной среды как случайного поля приводит при рассмотрении макроскопических объектов и фильтрационных процессов в них к математическим моделям, отличающимся от традиционных тем, что все или часть задаваемых и искомых функций (полей) являются случайными.

Рассмотрим для примера фильтрацию однородной несжимаемой жидкости в среде, проницаемость k которой является случайным полем. Будем считать, что фильтрация в области течения всюду описывается законом Дарси. Тогда для области, не содержащей источников, справедливо уравнение:

$$\operatorname{div}(k\nabla p) = 0, \tag{2.1}$$

где искомое поле давления $p(\vec{r})$, связанное с $k(\vec{r})$ уравнением, также является случайным. Уравнение (2.1) следует дополнить условиями на границе области течения или какими-либо другими, позволяющими из всех решений (2.1) выбрать единственное, соответствующее рассматриваемой задаче. Условия могут быть как детерминированными, так и случайными. Например, можно на границе задавать фиксированные неслучайные давления, дебиты и т. д. В этом случае флуктуации искомых величин (соответственные) на границах должны равняться нулю.

С другой стороны, целесообразно на границах требовать выполнения как бы «смягченных» краевых условий, например задавать в качестве дополнительного условия среднее давление на некотором контуре. При этом поле давления будет флуктуировать, даже если среда однородна. С другой стороны, дебит, как это доказано М. Маскетом [44], флуктуировать не будет. Таким образом, задание среднего давления как контурной константы или задание давления, в среднем равного на контуре заданной константе, приводит к аналогичным результатам.

Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем будем рассматривать такие задачи, в которых на границах задаются фиксированные неслучайные условия.

И все-таки уместно отметить, что смягченные дополнительные условия в определенных ситуациях необходимы. Так, например, при рассмотрении фильтрации в неограниченных средах в качестве дополнительного условия фиксируют средний градиент давления или среднюю скорость. При фильтрации в квазиизолированном элементе перетоки существуют, но они как-то ограничены. В этом случае считаем средний переток равным нулю, а дисперсию его — ограниченной сверху.

Цель исследования — определение случайного поля $p(\vec{r})$, поля скорости фильтрации, а также функционалов от них, например дебитов. Поскольку искомые поля — случайные, следует найти их важнейшие характеристики — моментные функции, спектральные представления, корреляции искомых и заданных полей и т. д.

Очевидно, такая задача более общая, чем соответствующая задача в детерминированной постановке. Легко видеть, что стохастическая постановка фильтрационной задачи эквивалентна постановке множества детерминированных задач, каждая из которых соответствует какому-либо из членов совокупности реализаций задаваемого случайного поля. Иными словами, при сохранении формального сходства с детерминированной задачей (вид уравнений и, возможно, дополнительных условий) стохастическая постановка связана с использованием качественно отличной информации о заданных и искомых полях.

Аналогично можно сформулировать любые задачи о фильтрационных течениях в неоднородных средах, не только гранулярных, но и трещиновато-пористых, трактуемых как случайные поля. Для этих задач характерно сохранение традиционной структуры при качественно ином способе задания и переработки информации.

Рассмотрим вопрос о том, каким же образом можно решать задачи в стохастической постановке. Имеющийся опыт показывает, что для решения подобных задач на практике используются два подхода.

Первый из них вытекает из уже упомянутой трактовки случайного поля как совокупности реализаций, т. е. совокупности обычных детерминированных функций, для каждой из которых решается соответствующая задача, а затем находится нужная информация о всей совокупности решений. Этот подход, иногда называемый монте-карловским, в принципе применим при рассмотрении любых задач, однако чрезвычайно большой объем перерабатываемой информации предъявляет очень жесткие требования к памяти и быстродействию используемых ЭВМ. Поскольку монте-карловская процедура позволяет численно рассматривать лишь частные примеры, это скорее математический эксперимент, и для получения общих выводов качественного характера необходимо провести большое количество подобных расчетов, что, конечно, накладывает дополнительные ограничения.

Второй подход относится к разновидности теории возмущений — основного аппарата современной теоретической физики [14, 22]. Как известно, эта теория эффективна в том случае, если для данного исследуемого сложного объекта существует «идеальный» объект, в каком-то определенном смысле ему близкий, для которого рассматриваемая задача имеет точное решение, и используя его, можно получить приближенное решение исходной задачи. «Идеальный» объект и соответствующая задача называются невозмущенными, а исходный объект и задача — возмущенными. Особенности исходной задачи, отличающие ее от задачи невозмущенной, называются возмущениями. Это могут быть отдельные члены в уравнениях, отклонения формы границ, на которых заданы дополнительные условия, сами дополнительные условия и т. д. Если возмущения заданы параметрически, то метод возмущений иногда называют методом малого параметра. Обычно параметризация такова, что при нулевых значениях малого параметра получается

невозмущенная задача, а решение возмущенной задачи ищется в виде асимптотического ряда по степеням малых параметров.

Первые применения теории возмущений связаны с проблемами небесной механики. При изучении задачи о движении планет в солнечной системе, например Земли, в первом приближении, учитывая взаимодействие Земли и Солнца, можно пренебрегать влиянием остальных небесных тел. В такой постановке задача, называемая задачей двух тел, имеет общее точное решение (так называемые орбиты Кеплера).

Попытка учесть влияние других небесных тел, в первую очередь Луны, приводит к знаменитой задаче трех тел, а также многих тел, для которых точное решение найти не удается. При рассмотрении подобных задач Лагранж, Лаплас, Пуассон, Гаусс сформулировали основные представления теории возмущений, разработали эффективные методы расчета орбит планет. Так при изучении задачи трех тел — системы Солнце — Земля — Луна в качестве невозмущенной выбрана задача двух тел для системы Солнце — Земля. В качестве малого параметра в возмущенной задаче использовалось отношение масс Луны и Земли. Широко известный в истории науки факт открытия «на кончике пера» планеты Нептун Дж. Адамсом и У. Леверье связан с использованием в расчетах теории возмущений.

Последующее развитие теории возмущений определялось как преодолением специфических трудностей, связанных с плохой сходимостью рядов, так и распространением ее методов на новые области применения — это задачи статистической механики, квантовой механики, квантовой теории поля и т. д. [14, 22].

В задачах теории фильтрации в средах со случайными неоднородностями такой подход приводит к выбору невозмущенной задачи для однородной среды. Поскольку невозмущенная задача должна иметь полное и в то же время простое решение, круг рассматриваемых задач сравнительно узок, преимущественно это квазиодномерные течения, для которых невозмущенная задача является одномерной.

Практически все последующее изложение будет представлять собой результаты применения методов возмущений для задач фильтрации в средах со случайными неоднородностями.

ЛИНЕЙНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Рассмотрим одномерное фильтрационное течение в пласте со случайной проницаемостью при условии, что на границах пласта — галереях — заданы неслучайные давления [36].

Итак, будем искать решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dp}{dx}\right] = 0 \tag{2.2}$$

при условиях

$$p(0) = P_1,\ p(l) = P_2. \tag{2.3}$$

Представим случайную функцию $k(x)$ в виде

$$k(x) = k_0 + k'(x), \quad k_0 = \langle k \rangle = \text{const}$$

и решение $p(x)$ будем искать в виде

$$p(x) = p_0(x) + p_1(x) + p_2(x) + \ldots, \tag{2.4}$$

где p_0 — решение задачи

$$d^2p_0(x)/dx^2 = 0, \quad p_0(0) = P_1, \quad p_0(l) = P_2, \tag{2.5}$$

а функции $p_i(x)$ удовлетворяют условиям

$$k_0 \frac{d^2p_i}{dx^2} = -k' \frac{d^2p_{i-1}}{dx^2} - \frac{dk'}{dx} \frac{dp_{i-1}}{dx}, \quad p_i(0) = p_i(l) = 0. \tag{2.6}$$

Случайный дебит запишется так

$$q = q_0 + q_1 + q_2 + \ldots, \tag{2.7}$$

где

$$q_0 = \frac{-k_0 h}{\mu} \frac{P_1 - P_2}{l},$$

$$q_i = \frac{-h}{\mu} \left[k_0 \frac{dp_i}{dx} + k'(x) \frac{dp_{i-1}}{dx} \right]. \tag{2.8}$$

Отсюда легко получить

$$q_1 = \frac{q_0}{k_0 l} \int_0^l k'(x)\, dx, \quad q_2 = \frac{-h}{\mu l} \int_0^l k'(x) \frac{dp_1(x)}{dx}\, dx, \tag{2.9}$$

где $p_1(x)$ — решение задачи

$$\frac{d^2p_1}{dx^2} = \frac{q_0\mu}{k_0^2 h} \frac{dk'}{dx}, \quad p_1(0) = p_1(l) = 0 \tag{2.10}$$

и, следовательно, имеет вид

$$p_1(x) = \frac{q_0\mu}{k_0^2 h} \int_0^l G(x, x') \frac{dk'(x')}{dx'} dx'. \tag{2.11}$$

Здесь $G(x, x')$ — функция Грина для задачи (2.10)

$$G(x, x') = \begin{cases} (x' - l)\, x/l, & x \leqslant x', \\ (x - l)\, x'/l, & x \geqslant x'. \end{cases}$$

Из (2.9) найдем дисперсию дебита (в первом приближении)

$$Dq = \frac{q_0^2}{k_0^2 l^2} \int_0^l \int_0^l K(x, x')\, dx' dx \tag{2.12}$$

и во втором приближении средний дебит $\langle q \rangle = q_0 + \langle q_2 \rangle$

$$\langle q \rangle = q_0 \left[1 - \frac{1}{k_0^2 l} \int_0^l \int_0^l G'_x(x, x') K_{k'}(x, x')\, dx' dx \right]. \tag{2.13}$$

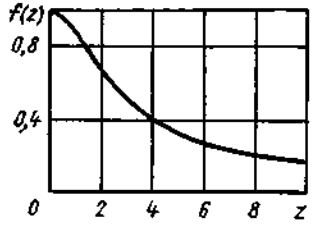


Рис. 3. График функции $f = -f(z)$

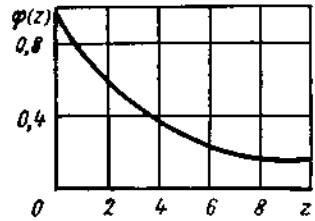


Рис. 4. График функции $\varphi = \varphi(z)$

Преобразуя (2.13), получим

$$\langle q \rangle = q_0 \left\{ 1 - \zeta^2 \left[1 - \frac{1}{Dl^2} \int_0^l \int_0^l K(x, x')\, dx dx' \right] \right\}, \quad \zeta^2 = \frac{D}{k_0^2}, \tag{2.14}$$

откуда видно, что $\langle q \rangle$ и Dq в рассматриваемом приближении связаны зависимостью

$$\langle q \rangle / q_0 = 1 - \zeta^2 \lambda, \quad \lambda = 1 - Dq / q_0^2 \zeta^2. \tag{2.15}$$

Назовем λ безразмерным смещением дебита. Как следует из (2.15), безразмерное смещение зависит от квадрата отношения коэффициентов вариации дебита и проницаемости или, другими словами, от квадрата отношения неопределенностей дебита и проницаемости.

Если корреляционная функция проницаемости имеет вид $K(x, x') = D \exp[-(x - x')^2/a^2]$ или $K(x, x') = D \exp[-|x - x'|/a]$, интеграл в (2.12) и (2.14) легко вычисляется [35] и в первом случае имеем

$$Dq = q_0^2 \zeta^2 f(l/a), \quad \lambda = 1 - f(l/a),$$
$$f(z) = z^{-2} \left(z \sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}\, z + e^{-z^2} - 1 \right). \tag{2.16}$$

Для второй корреляционной функции

$$Dq = q_0^2 \zeta^2 \varphi(l/a), \quad \lambda = 1 - \varphi(l/a), \quad \varphi(z) = 2z^{-2} (e^{-z} + z - 1). \tag{2.17}$$

Функции f и φ протабулированы в [35] (рис. 3, 4).

Аналогично рассматривается одномерная радиальная фильтрация к скважине радиуса ρ, расположенной в центре кругового пласта радиуса R, при условии, что случайная проницаемость является функцией либо радиуса, либо полярного угла в полярной системе координат, полюс которой совпадает с центром скважины.

Пусть, например, $k = k(r)$. Тогда дисперсию дебита можно записать в виде

$$Dq = \frac{q_0^2}{k_0^2 \ln^2 R/\rho} \int_\rho^R \int_\rho^R \frac{K(r, r')\, dr dr'}{rr'}, \tag{2.18}$$

$$q_0 = \frac{2\pi k_0 h [p(R) - p(\rho)]}{\mu \ln R/\rho}. \tag{2.19}$$

Для математического ожидания дебита имеем

$$<q> = q_0 \left\{ 1 - \zeta^2 \left[1 - \frac{1}{D \ln^2 R/\rho} \int_{\rho}^{R} \int_{\rho}^{R} \frac{K(r, r')\, dr dr'}{rr'} \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Если же $k = k(\theta)$, то имеем точные соотношения

$$Dq = \frac{q_0^2}{4\pi^2 k_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\theta, \theta')\, d\theta d\theta',$$

$$<q> = q_0. \quad (2.21)$$

Рассмотрим частный случай, допускающий получение точного решения. Несмотря на некоторую искусственность их выбора, изучение таких задач имеет определенный смысл, так как сравнение точных и приближенных решений позволяет оценить точность последних.

Итак, пусть

$$k(x) = k_0 (1 + \alpha \cos \omega x). \quad (2.22)$$

Здесь $k_0 = <k> = \text{const}$; α — нормированная случайная величина с нулевым математическим ожиданием, кроме того, будем считать, что $\omega = 2\pi n/l$, где n — произвольное натуральное число, а l — длина пласта между галереями.

Для дебита имеем

$$q = \frac{h}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{r}, \quad r = \frac{1}{k_0} \int_0^l \frac{dx}{1 + \alpha \cos \omega x}. \quad (2.23)$$

Вычислив интеграл в (2.23), найдем для любого n:

$$q = q_0 \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad q_0 = k_0 h (p_1 - p_2)/\mu l. \quad (2.24)$$

Независимость дебита от частоты ω или числа n объясняется периодичностью $k(x)$ и линейной зависимостью сопротивления каждой ячейки периодов от ее длины.

Пусть, например, параметр α равномерно распределен в интервале $(-3/4, 3/4)$. Тогда

$$<q> = \frac{2}{3} q_0 \int_{-3/4}^{3/4} \sqrt{1 - \alpha^2}\, d\alpha = 0{,}8967 q_0, \quad (2.25)$$

$$Dq = \frac{2}{3} \int_{-3/4}^{3/4} [q_0 \sqrt{1 - \alpha^2} - <q>]^2\, d\alpha = 0{,}2345 q_0^2.$$

Решая эту задачу методом возмущений, получим в рамках второго приближения

$$q = q_0 \left\{ 1 + \frac{1}{lk_0} \int_0^l k'(x)\, dx - \frac{1}{lk_0^2} \int_0^l k'^2(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{l^2 k_0^2} \left[\int_0^l k'(x)\, dx \right]^2 \right\}. \quad (2.26)$$

Подставив (2.22) в (2.26), найдем

$$q = q_0(1 - \alpha^2/2), \tag{2.27}$$

откуда для равномерно распределенного α следует

$$<q> = 0{,}2816q_0,\ Dq = 0{,}9060q_0^2. \tag{2.28}$$

Сопоставляя (2.28) и (2.25), можно убедиться в приемлемой точности приближенного способа отыскания среднего дебита и дисперсии дебита.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УСРЕДНЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Решение гидродинамической задачи о фильтрационном поле в среде со случайной неоднородностью связано с построением некоторого нелинейного оператора $p(\vec{x}) = A\{k(\vec{x})\}$ и последующего вычисления его многомерной функции распределения или статистических моментов (здесь p — давление; $k(\vec{x})$ — проницаемость среды — функция точки $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Очевидно, структура оператора A над функцией $k(\vec{x})$ зависит не только от геометрии области течения, но и от краевых условий, заданных на границе потока. Это приводит, в частности, к тому, что эффективные параметры — проницаемость, толщина и т. д. оказываются, вообще говоря, различными для одной и той же области и среды, но разных краевых условий. Поскольку построение A легко осуществить для одномерных течений, ниже изучаются две задачи: 1 — задание детерминированных дебита и давления на одной из галерей; 2 — задание детерминированных давлений на галереях.

1. Рассмотрим стационарное одномерное течение между галереями, расположенными на концах промежутка $0 \leqslant x \leqslant l$. Искать решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dp(x)}{dx}\right] = 0, \tag{2.29}$$

очевидно, следует при условии

$$p(0) = p_1. \tag{2.30}$$

Нетрудно убедиться, что задание дебита течения

$$q = k(x)\,dp/dx \tag{2.31}$$

дает первый интеграл уравнения (2.29), и, следовательно, интегрируя (2.31) при условии (2.30), получим

$$p(x) - p_1 = q\int_0^x k^{-1}(x)\,dx. \tag{2.32}$$

Усреднив (2.32) по вероятности, запишем

$$<p> = p_1 - q\int_0 <k^{-1}(x)>\,dx. \tag{2.33}$$

Пусть $k(x)$ — стационарная случайная функция с математическим ожиданием $\langle k(x)\rangle = k_0 = \text{const}$ и одномерной плотностью распределения $f(k)$. Тогда $k^{-1}(x)$ также стационарна и ее математическое ожидание

$$\langle k^{-1}(x)\rangle = \int f(k)\, k^{-1} dk = k_1^{-1} = \text{const} \qquad (2.34)$$

определяется функцией $f(k)$. Если, например, распределение $\ln k$ является нормальным или его модификацией (4.8) из [35], то легко показать, что

$$k_1 = k_0/(1+\zeta^2), \quad \zeta^2 = Dk/k_0^2. \qquad (2.35)$$

Здесь ζ — коэффициент вариации проницаемости. Следует отметить, что (2.35) выполняется приближенно при любых $f(k)$, что вытекает из разложения

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0 + k'} = \frac{1}{k_0\,(1 + k'/k_0)} = \frac{1}{k_0}\left[1 - \frac{k'}{k_0} + \left(\frac{k'}{k_0}\right)^2 - \ldots\right]. \qquad (2.36)$$

В случае малых флуктуаций из (2.34) и (2.36) следует

$$k_1 = k_0/(1+\zeta^2). \qquad (2.37)$$

Интересно отметить, что $\langle p(x)\rangle$ не зависит от корреляционных соотношений, а определяется лишь одноточечными моментами, в частности k_0 и ζ^2, что является следствием задания условия (2.31). Заметим также, что распределение $\langle p(x)\rangle$ является линейным.

2. Перейдем к изучению распределения давления в задаче 2. Нетрудно проверить, что решение уравнения (2.29) при условиях $p(0) = p_1$, $p(l) = p_2$ будет иметь вид

$$p(x) = p_1 - (p_1 - p_2) \int_0^x k^{-1}(x)\, dx \Big/ \int_0^l k^{-1}(x)\, dx. \qquad (2.38)$$

Разлагая $k^{-1}(x)$ в ряд по степеням флуктуаций $k' = k - k_0$, получим, удержав квадратичные члены и усреднив по вероятности для безразмерного давления $p^*(x)$:

$$\langle p^*(x)\rangle = (x/l)\,[1 + \zeta^2 \mu(x,\ l)], \quad p^*(x) = (p(x) - p_1)/(p_2 - p_1), \qquad (2.39)$$

$$\mu(x,\ l) = \frac{1}{l^2}\int_0^l\int_0^l K^*(x,\ x')\, dxdx' - \frac{1}{xl}\int_0^x\int_0^l K^*(x,\ x')\, dxdx'.$$

ТАБЛИЦА 1

l/a	x/l							
	0	0,1	0,25	0,4	0,60	0,75	0,9	1
0,1	0,0159	0,0114	0,0061	0,0019	—0,0013	—0,0020	—0,0088	0
1	0,1037	0,0743	0,0385	0,0123	—0,0082	—0,0128	—0,0082	0
2	0,1354	0,0958	0,0490	0,0156	—0,0103	—0,0161	—0,0106	0
5	0,1219	0,0780	0,0373	0,0113	—0,0076	—0,0125	—0,0089	0
10	0,0800	0,0432	0,0167	0,0046	—0,0031	—0,0055	—0,0048	0
100	0,0098	0,0008	0	0	—0	—0,0001	—0,0001	0

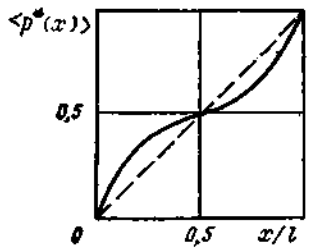
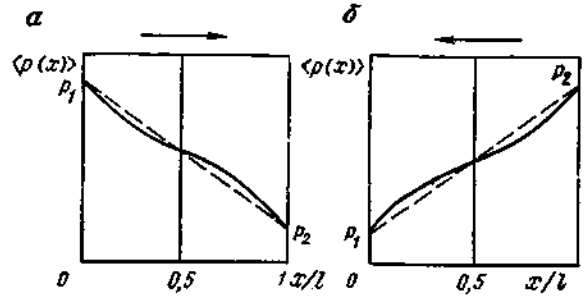


Рис. 5. Распределение среднего безразмерного давления $< p^* (x) >$ (пунктиром показано линейное распределение)

Рис. 6. Распределение среднего давления $< p (x) >$ при движении жидкости слева направо (*а*) и справа налево (*б*)



Используя корреляционную функцию $K^* = \exp[-|x - x'|/\alpha]$, после преобразований получим

$$\mu = \varphi(l/\alpha) - \frac{x}{2l}\varphi(x/\alpha) - \frac{\alpha^2}{xl}\left(e^{-l/\alpha} - e^{-(l-x)/\alpha} + \frac{x}{\alpha}\right). \qquad (2.40)$$

Результаты подсчетов $\mu\left(\frac{x}{l}, \frac{l}{\alpha}\right)$ по формуле (2.40) представлены в табл. 1.

Нетрудно видеть, что распределение $<p^*(x)>$ при любых l/α, отличных от нуля и бесконечности, имеет вид кривой (рис. 5).

Любопытно, что средняя безразмерная депрессия при $0 \leqslant x/l \leqslant 0{,}5$ больше, а при $0{,}5 \leqslant x/l \leqslant 1$ меньше, чем x/l, т. е. безразмерной депрессии, соответствующей линейному распределению давления. При ζ^2 не слишком больших, например порядка единицы, это отклонение малосущественно.

Рассмотрим изменение размерного среднего давления для двух случаев: $p_1 > p_2$ и $p_1 < p_2$. Нетрудно убедиться, что в соответствии с (2.39) и табл. 1 кривые $<p(x)>$ имеют вид, соответствующий рис. 6, *а*, *б*, где пунктиром нанесено линейное распределение, а стрелкой указано направление движения. Как видно из рисунка, на половине течения, примыкающей к входной галерее, среднее давление меньше, чем в линейном случае. У выходной галереи давление, наоборот, больше, чем линейное. И этот несколько неожиданный эффект своеобразной анизотропии, связанный с направлением потока,— следствие нелинейности оператора (2.38).

ГЛАВА 3

СТАЦИОНАРНЫЕ КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В предыдущей главе рассмотрены задачи, в которых параметры среды и течения являлись функцией лишь одной переменной. Некоторая искусственность в постановке таких задач оправдана сравнительной простотой получения решения и его анализа. Метод возмущений дает возможность получить удовлетворительные оценки средних характеристик течений и их дисперсий.

Перейдем к рассмотрению течений, более сложных, чем одномерные, а именно — квазиодномерных. Под квазиодномерными течениями понимаются потоки, характеристики которых в основном зависят от одной координаты и слабее от остальных. Например, если математическое ожидание проницаемости зависит лишь от одной координаты, а границы потока ориентированы таким образом, что поля давления и скорости зависят в основном от той же координаты или ей ортогональной, течение считают квазиодномерным.

Далее рассмотрены квазиодномерные течения, близкие к линейному (на плоскости и в пространстве) и к радиальному (на плоскости). Для этих течений методом возмущений находятся средний дебит и дисперсия дебита. Для случая квазирадиального течения исследуется вопрос о влиянии информации, характеризующей призабойную зону скважины, на точность прогноза ее дебита.

КВАЗИОДНОМЕРНОЕ ПЛОСКОЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим пример квазиодномерного — квазилинейного плоского течения в пласте, ограниченном двумя параллельными галереями и перпендикулярными им прямолинейными линиями тока. При этом предполагается, что математическое ожидание проницаемости зависит от x, либо от y (система координат ориентирована параллельно галереям и линиям тока). В отличие от математического ожидания флуктуации проницаемости зависят в данной задаче от двух переменных (x и y). В такой постановке задача представляет определенный интерес, так как адекватна одному из наиболее типичных реальных течений.

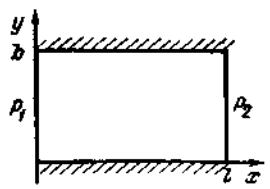


Рис. 7. Область квазиодномерного (квазилинейного) течения в прямоугольнике

Итак, изучим установившееся плоское течение в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant b$ (рис. 7). Будем искать решение уравнения

$$L(k,\ p) = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,\ y)\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(x,\ y)\frac{\partial p}{\partial y}\right] = 0 \qquad (3.1)$$

при условиях:

$$1)\ p(0,\ y) = p_1 = \text{const},\ \ 2)\ p(l,\ y) = p_2 = \text{const},$$
$$3)\ \partial p(x,\ 0)/\partial y = 0,\ \ 4)\ \partial p(x,\ b)/\partial y = 0. \tag{3.2}$$

Галерейные давления p_1, p_2 считаются неслучайными, $k(x,\ y)$ — случайная функция координат.

Проинтегрировав уравнение (3.1) по y в пределах от 0 до b с учетом условий 3) и 4) из (3.2), получим закон сохранения случайного дебита прямоугольного элемента

$$q = -\frac{h}{\mu}\int_0^b k(x,\ y)\frac{\partial p}{\partial x}dy. \tag{3.3}$$

Используя метод возмущений, представим случайное давление и дебит в виде

$$p(x,\ y) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(x,\ y),\ \ q = \sum_{i=0}^{\infty} q_i, \tag{3.4}$$

где p_i при $i > 0$ есть решение задачи

$$L(k_0,\ p_i) = -L(k',\ p_{i-1}),$$
$$p_i(0,\ y) = p_i(l,\ y) = 0,\ \partial p_i(x,\ 0)/\partial y = \partial p_i(x,\ b)/\partial y = 0, \tag{3.5}$$

а невозмущенное решение p_0 удовлетворяет условиям

$$L(k_0,\ p_0) = 0,\ \ p_0(0,\ y) = p_1,\ \ p_0(l,\ y) = p_2,$$
$$p_{0y}(x,\ 0) = p_{0y}(x,\ b) = 0. \tag{3.6}$$

Величины q_i определяются следующими равенствами:

$$q_0 = -\frac{h}{\mu}\int_0^b k_0(x,\ y)\frac{\partial p_0}{\partial x}dy,\ \ q_i = -\frac{h}{\mu}\int_0^b\left[k_0\frac{\partial p_i}{\partial x} + k'\frac{\partial p_{i-1}}{dx}\right]dy. \tag{3.7}$$

Пусть для простоты $k_0(x,\ y) = \text{const}$. Тогда из (3.7)—(3.5) следует

$$q_0 = \frac{k_0 bh(p_1 - p_2)}{\mu l},\ \ q_1 = \frac{q_0}{k_0 bl}\int_0^l\int_0^b k'(x,\ y)\,dxdy,$$
$$q_2 = -\frac{h}{\mu l}\int_0^l\int_0^b k'(x,\ y)\frac{\partial p_1}{\partial x}dxdy, \tag{3.8}$$

где p_1 есть решение задачи

$$\nabla^2 p_1 = \frac{\mu q_0}{hbk_0^2}\frac{\partial k'}{\partial x},\ \ p_1(0,\ y) = p_1(l,\ y) = 0,\ \ p_{1y}(x,\ 0) = p_{1y}(x,\ b) = 0. \tag{3.9}$$

Используя $G(x,\ y,\ x',\ y')$ — функцию Грина задачи (3.9), запишем p_1 в виде

$$p_1(x,\ y) = \frac{\mu q_0}{hbk_0^2}\int_0^l\int_0^b G(x,\ y,\ x',\ y')\frac{\partial k'(x',\ y')}{\partial x'}dx'dy', \tag{3.10}$$

где

$$C(x, y, x', y') = -\frac{2}{\pi^2 lb}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{l^2}{m^2}\sin\frac{m\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}x' - \frac{4}{\pi^2 lb}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2}{l^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{n^2}{b^2}\right)^{-1}\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{l}x'\cos\frac{n\pi}{b}y'. \qquad (3.11)$$

Подставив (3.10) в (3.8) и усреднив, получим

$$\langle q_2\rangle = -\frac{q_0}{k_0^2 lb}\int_0^l\int_0^b\int_0^l\int_0^b G_x(x, y, x', y')\,K_{x'}(x, y, x', y')\,dxdydx'dy'. \qquad (3.12)$$

Возведя q_1 из (3.8) в квадрат и усреднив, будем иметь в первом приближении

$$Dq = \frac{q_0^2}{k_0^2 l^2 b^2}\int_0^l\int_0^b\int_0^l\int_0^b K(x, y, x', y')\,dxdydx'dy'. \qquad (3.13)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ ДЕБИТА

Приведем результаты вычисления дисперсии дебита для некоторых видов корреляционной функции. Так, если

$$K = D\exp\left[-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{a^2}\right], \qquad (3.14)$$

то

$$Dq = q_0^2\zeta^2 f(l/a)\,f(b/a), \qquad (3.15)$$

где $f(z)$ определяется формулой (2.16). Нетрудно убедиться, что при $b/a \to 0$ формула (3.15) переходит в соответствующую формулу для линейного одномерного течения. Если

$$K = D\exp\left[-\frac{|x-x'|+|y-y'|}{a}\right], \qquad (3.16)$$

то получим аналогично

$$Dq = q_0^2\zeta^2\varphi(l/a)\,\varphi(b/a), \qquad (3.17)$$

где $\varphi(z)$ определена формулой (2.17).

И в этом случае при $b/a \to 0$ формула (3.17) переходит в формулу для одномерного течения.

Заметим, что использование во втором случае «расстояния» $\rho = |x-x'|+|y-y'|$, отличного от эвклидового

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

связано в первую очередь с очевидными упрощениями расчетов, но приводит к рассмотрению неизотропных полей. С другой стороны, достаточно очевидное неравенство

$$\rho/\sqrt{2} < r < \rho \qquad (3.18)$$

позволяет записать двустороннее неравенство для корреляционной функции $K = D\exp(-r/a)$

$$\varphi\left(\frac{l}{a}\right)\varphi\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant Dq\zeta^{-2}q_0^{-2} \leqslant \leqslant \varphi\left(\frac{l}{a\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{b}{a\sqrt{2}}\right), \quad (3.19)$$

и так как в практических случаях известен лишь порядок a, а значение $\varphi(z)$ с изменением аргумента меняется довольно плавно, то оценку (3.19) следует считать вполне удовлетворительной.

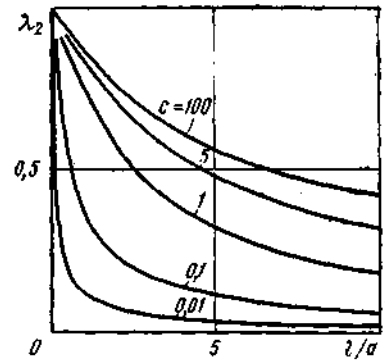


Рис. 8. Зависимость безразмерной дисперсии дебита квазиодномерного течения λ от параметра l/a для различных $c = l/b$

Рассмотрим некоторые примеры расчетов по формулам (3.15), (3.17). Удобно анализировать $\lambda = \zeta_a/\zeta_k$ — отношения коэффициентов вариации дебита и проницаемости. Очевидно, для случая (3.15)

$$\lambda_1 = \sqrt{f(l/a)\,f(b/a)}, \quad (3.20)$$

а для случая (3.17)

$$\lambda_2 = \sqrt{\varphi(l/a)\,\varphi(b/a)}. \quad (3.21)$$

График зависимости $\lambda_2(a/l)$ при различных $c = l/b$ представлен на рис. 8. Кривые для параметра λ_1 совершенно аналогичны и потому не приводятся.

Используя представления функций f и φ при больших значениях аргумента z ($f \sim \sqrt{\pi/z}$, $\varphi \sim 2/z$), нетрудно записать приближенные выражения для λ в том случае, когда масштаб неоднородности мал по сравнению с l и b.

$$\lambda_1 = a\sqrt{\pi}/\sqrt{lb}, \quad \lambda_2 = 2a/\sqrt{lb}. \quad (3.22)$$

Иными словами, безразмерная вариация дебита λ пропорциональна отношению линейного масштаба неоднородности к среднему геометрическому размеру области течения.

Можно трактовать (3.22) и так: полагая, что $N = lb/a^2$ характеризует отношение площади области фильтрации к площади характерной неоднородности, получим

$$\lambda_1 \sim \sqrt{\pi}N^{-1/2}, \quad \lambda_2 = 2N^{-1/2}.$$

Грубо говоря, в рассматриваемом приближении вклад элементарной неоднородности в дебит аддитивен и независим (точнее некоррелирован).

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ДЕБИТА

Формулы (3.8), (3.12) дают возможность представить математическое ожидание дебита $< q >$ в виде интеграла от функции Грина и корреляционной функции проницаемости. Однако для

получения количественной информации анализ следует продолжить, задав конкретную корреляционную функцию. Но прежде чем заняться этим, рассмотрим важный асимптотический случай мелкомасштабных неоднородностей. Будем считать, что случайное поле проницаемости, в достаточной степени произвольное, обладает тем свойством, что оно однородно и масштаб корреляции его a мал по сравнению с l и b.

Примем, что корреляционная функция имеет вид

$$K = Df(|x - x'|/a,\ |y - y'|/a),\ a \ll l,\ b, \tag{3.23}$$

где симметричная функция своих аргументов $f(|\zeta|,\ |\eta|) \to 0$ при $\zeta \to \infty$ и $\eta \to \infty$.

Обратившись к (3.12), запишем

$$< q_2 > = -\frac{q_0 \zeta^2}{lb} \int_0^l \int_0^b \varphi(x,\ y)\, dxdy,\ \varphi(x, y) = D^{-1} \int_0^l \int_0^b G'_x K'_{x'}\, dx'dy' \tag{3.24}$$

и исследуем $\varphi(x, y)$ при a/l и a/b, стремящихся к нулю. Перейдем в (3.24) к новым переменным ζ и η. Тогда

$$\varphi(x, y) = a \int_{-x/a}^{(l-x)/a} \int_{-y/a}^{(b-y)/a} G'_x(x, y, x + a\zeta,\ y + a\eta)\, f'_\zeta(|\zeta|,\ |\eta|)\, d\zeta d\eta. \tag{3.25}$$

Как известно, функция Грина рассматриваемой задачи представима в виде

$$G(x, y, x', y') = (2\pi)^{-1} \ln r + \gamma(x, y, x', y'), \tag{3.26}$$

где $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$; γ — функция, гармоническая всюду, включая полюс (x, y).

Оценивая $\varphi(x, y)$ при $a \to 0$ в точках (x, y), лежащих внутри прямоугольника течения, из (3.25) получим

$$\varphi(x, y) = -\int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\zeta^2 + \eta^2} \right) \frac{\partial f(|\zeta|,\ |\eta|)}{\partial \zeta} d\zeta d\eta. \tag{3.27}$$

Интегрируя (3.27) по частям с учетом изменения f при $\zeta \to \infty$, найдем

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\zeta^2 + \eta^2} \right) f(|\zeta|,\ |\eta|)\, d\zeta d\eta \tag{3.28}$$

и, наконец, учитывая равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln r \right) = \frac{1}{2} \delta(\zeta, \eta) + \frac{1}{2\pi} \frac{\eta^2 - \zeta^2}{(\zeta^2 + \eta^2)^2}, \tag{3.29}$$

получим $\varphi(x, y) = 1/2$, поскольку интеграл (3.28) от симметричной функции f и второго слагаемого в (3.29) равен нулю. Конечно, требование изотропии корреляционной функции несколько упростило

бы рассуждения, но тогда из рассмотрения выпадал бы случай корреляционной функции (3.16).

Итак, подставляя $\varphi = 1/2$, получим при достаточно произвольных ограничениях на вид корреляционной функции

$$< q_2 > = -q_0\zeta^2/2. \tag{3.30}$$

Нетрудно заметить, что получив формулу (3.30), мы фактически не использовали того, что область течения — прямоугольник. Это и не удивительно, поскольку рассматривался случай мелкомасштабных неоднородностей.

Вычислим теперь математическое ожидание дебита плоского квазиодномерного течения при произвольных значениях a/l и a/b в том случае, когда корреляционная функция проницаемости имеет вид

$$K = D\exp\left[-\frac{|x-x'|+|y-y'|}{a}\right]. \tag{3.31}$$

Подставив (3.31) и (3.11) в (3.12), получим после интегрирования и преобразований

$$-< q_2 >/q_0\zeta^2 = [1-\varphi(l/a)]\varphi(b/a) + \alpha_1\beta_1\rho_1 - \alpha_2\beta_1(\rho_2 - \rho_3 e^{-l/a}) -$$
$$-\alpha_1\beta_1^2(\rho_4 - \rho_5 e^{-b/a}) + \alpha_1^2\beta_1^2(\rho_6 - \rho_7 e^{-l/a} - \rho_8 e^{-b/a} + \rho_9 e^{-(l+b)/a}), \tag{3.32}$$

где

$$\alpha = l/a\pi,\ \beta = b/a\pi,\ \alpha_1 = 2\alpha/\pi,\ \beta_1 = 2\beta/\pi,\ c = l/b$$

$$\rho_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\gamma_{mn},\ \gamma_{mn} = \frac{m^2}{(m^2+n^2c^2)(m^2+\alpha^2)(n^2+\beta^2)},$$

$$\rho_2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mn}}{m^2+\alpha^2},\quad \rho_3 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\gamma_{mn}}{m^2+\alpha^2},$$

$$\rho_4 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mn}}{n^2+\beta^2},\quad \rho_5 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\gamma_{mn}}{n^2+\beta^2},$$

$$\rho_6 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\gamma_{mn}}{(m^2+\alpha^2)(n^2+\beta^2)},\quad \rho_7 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\gamma_{mn}}{(m^2+\alpha^2)(n^2+\beta^2)},$$

$$\rho_8 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\gamma_{mn}}{(m^2+\alpha^2)(n^2+\beta^2)},\quad \rho_9 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\gamma_{mn}}{(m^2+\alpha^2)(n^2+\beta^2)}.$$

Ряды (3.32) медленно сходятся и потому малопригодны для вычислений. Ускорение их сходимости связано с использованием известных соотношений:

$$i_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+\alpha^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha}\operatorname{cth}\pi\alpha,$$

$$i_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2+\alpha^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha}\,\mathrm{sh}^{-1}\pi\alpha,$$

$$i_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha}\,\mathrm{ctg}\,\pi\alpha,$$

$$i_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha}\,\sin^{-1}\pi\alpha. \qquad (3.33)$$

Дифференцируя (3.33) по α, легко получить конечные выражения для сумм типа (3.33), где вместо $(m^2 \pm \alpha^2)$ будет фигурировать $(m^2 \pm \alpha^2)^2$.

Для области течения — квадрата ($l = b$, $c = 1$, $\alpha = \beta$, $\alpha_1 = \beta_1$) ряды (3.32) вычисляются в конечном виде

$$\rho_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{m^2}{(m^2+n^2)(m^2+\alpha^2)(n^2+\alpha^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+\alpha^2}\right]^2 = \frac{i_1^2}{2}.$$

Аналогично вычисляются:

$$\rho_6 = \frac{1}{8\alpha^2}\left(\frac{di_1}{d\alpha}\right)^2, \quad \rho_9 = \frac{1}{8\alpha^2}\left(\frac{di_2}{d\alpha}\right)^2,$$

$$\rho_2 + \rho_4 = -\frac{1}{4\alpha}\frac{di_1^2}{d\alpha}, \quad \rho_3 + \rho_5 = -\frac{1}{4\alpha}\frac{di_2^2}{d\alpha},$$

$$\rho_7 + \rho_8 = \frac{1}{4\alpha^2}\frac{di_1}{d\alpha}\frac{di_2}{d\alpha}.$$

Подставив найденные выражения для ρ_i в (3.32), после довольно утомительных преобразований получим простую конечную формулу

$$< q_2 > = -\frac{q_0\zeta^2}{2}[1 - \varphi^2\,(l/a)], \qquad (3.34)$$

где $\varphi(z)$ определена из соотношения (2.17).

Сравнивая (3.34) с (3.17), легко установить, что при $c = 1$

$$\lambda = < q_2 > /q_0\zeta^2 = -\frac{1}{2}(1 - D_2), \qquad (3.35)$$

где $D_2 = Dq/q_0^2\zeta^2$ — безразмерная дисперсия дебита.

При $c \neq 1$ получить аналогичным образом формулы для $< q_2 >$ не удается. Поэтому для улучшения сходимости рядов при $c > 1$ наряду с (3.33) используется очевидное разложение

$$\frac{1}{(m^2+\alpha^2)(m^2+\beta^2)} = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{1}{m^2+\alpha^2} - \frac{1}{m^2+\beta^2}\right).$$

Например, для ρ_1 будем иметь

$$\rho_1 = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{m^2}{(m^2+n^2c^2)(m^2+\alpha^2)(n^2+\beta^2)} =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2c^2)(n^2+\beta^2)} - \beta^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+\beta^2)(n^2-\beta^2)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{m^2+\alpha^2} - \frac{1}{m^2+n^2c^2}\right).$$

Просуммировав по m в соответствии с (3.33), а затем и по n, там, где это возможно, приняв с большой точностью при $c \geqslant 1$, что $\operatorname{cth} n\pi c = 1$, получим

$$\alpha_1\beta_1\rho_1 = \left(-\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{a}\right)\operatorname{cth}\frac{l}{a} + \frac{\beta^2}{\pi} \times$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+\beta^2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-\beta^2)}\right].$$

Последние два ряда легко вычислить, применяя обычные методы улучшения сходимости, заключающиеся в выделении относительно медленно сходящейся части, суммируемой в конечном виде, и быстро сходящегося остатка. В нашем случае удобно выделить Σn^{-3}, которую легко подсчитать с нужной точностью. Аналогично вычисляются остальные ρ_i. В случае $c<1$ вычисления проводятся так же, но при этом принимается, что $\operatorname{cth} \pi m/c = 1$.

Реализация описанной процедуры позволяет вычислить безразмерное смещение $\lambda = \langle q_2 \rangle / q_0 \zeta^2$ для различных c во всем диапазоне изменения параметра a/l (рис. 9, 10). Обращает на себя внимание немонотонное изменение λ при конечных $c > 1$. Очевидно, для вытянутых вдоль оси x течений при определенных соотношениях между определяющими параметрами течение прак-

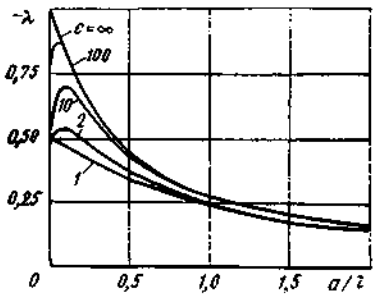


Рис. 9. Зависимость безразмерного смещения дебита квазиодномерного течения от параметра a/l для различных $c = l/b > 1$

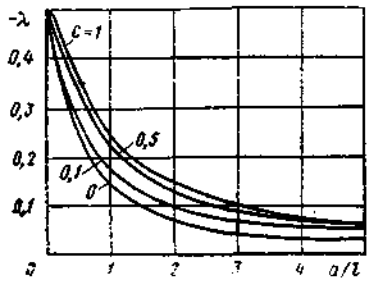


Рис. 10. Зависимость безразмерного смещения дебита квазиодномерного течения от параметра a/l для различных $c = l/b < 1$

тически одномерное. Для этого достаточно, чтобы $a/b > 1$, $a/l < 1$. Уменьшение a при фиксировании остальных параметров приводит к увеличению флуктуаций поля скоростей, увеличению роли двумерности течения. В конечном счете при $a \to 0$ все кривые, исключая случай $c = \infty$, сходятся в точке $\lambda = -1/2$. Таким образом, при $c = 1$ точная расчетная формула записывается в виде простого конечного соотношения, а при $c \neq 1$ смещение выражено в виде комбинации быстро сходящихся рядов (см. рис. 9, 10).

Такая ситуация в принципе исчерпывает задачу определения смещения, однако заманчиво и для случая $c \neq 1$ получить конечную формулу, пусть даже и приближенную. К сожалению, обычный путь тождественных преобразований соотношения (3.32), оказавшийся плодотворным при $c = 1$, в общем случае реализовать не удалось.

Далее мы попытаемся «сконструировать» формулу для λ, используя структуру функции Грина и интегралов, некоторую симметрию искомых соотношений, знание асимптотических формул.

Запишем точную формулу (3.34) следующим образом:

$$-\lambda = [1 - \varphi(l/a)]\,\varphi(l/a) + \frac{1}{2}[1 - \varphi(l/a)]^2. \tag{3.36}$$

Обратившись к формуле (3.32), представим ее в виде

$$-\lambda = [1 - \varphi(l/a)]\,\varphi(b/a) + \Delta, \tag{3.37}$$

где Δ объединяет в (3.32) все остальные члены. Очевидно, что при $l = b$ формула (3.37) должна перейти в (3.36). Естественно ожидать, что при $l = b$ выражение Δ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{2}[1 - \varphi(l/a)]\,[1 - \varphi(b/a)]. \tag{3.38}$$

Подставив принятое значение Δ в (3.37), получим

$$\lambda = -\frac{1}{2}[1 - \varphi(l/a)]\,[1 + \varphi(b/a)]. \tag{3.39}$$

Рассмотрим некоторые предельные ситуации. Естественно, что при $l = b$ формула (3.39) переходит в (3.34). При $b/a \to 0$, т. е. в одномерном случае, из (3.39) следует точная формула (2.17). При конечных l и b и $a \to 0$ из (3.39) получаем точный результат $\lambda = -1/2$. При $a \to \infty$ и конечных l и b имеем $\lambda \to 0$. И наконец, сравнение расчетов по формуле (3.39) во всем диапазоне изменения определяющих параметров с результатами расчетов на ЭВМ по формуле (3.32) не позволило обнаружить разницу результатов (сравнивались пять значащих цифр). По-видимому, такое совпадение не может быть случайным, формула (3.39) «угадана» верно, и в этом смысле может считаться точной. Заметим, что указания на некоторое расхождение между результатами расчетов по формулам (3.39) и (3.32), имеющиеся в работе [36], объясняются тем, что первоначально суммирование рядов в (3.32) проводилось с недостаточной точностью. Более точные расчеты с помощью ЭВМ, как уже говорилось, дали одинаковые результаты.

КВАЗИОДНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим квазилинейное пространственное течение в параллелепипеде с размерами l, b и h, грани которого ориентированы параллельно координатным осям x, y, z. Будем считать, что на гранях, перпендикулярных оси x, зафиксировано неслучайное давление, а остальные грани непроницаемы для жидкости. Проницаемость среды внутри области течения будем считать случайной статистически однородной функцией всех трех координат. Поскольку метод решения этой задачи только в деталях отличается от рассмотренного достаточно подробно двумерного случая, далее приводятся лишь результаты с небольшим комментарием. Итак, имеем:

$$< q > = q_0 + < q_2 >, \quad q_0 = k_0 b h \mu^{-1} l^{-1} i^{-1} \times (p_1 - p_2), \tag{3.40}$$

$$< q_2 > = -\frac{q_0}{k_0^2 l b h} \int_0^l \int_0^b \int_0^h \int_0^l \int_0^b \int_0^h G_x'(\vec{r}, \vec{r}')\, K_{x'}'(\vec{r}, \vec{r}')\, dv dv',$$

$$Dq = \frac{q_0^2}{k_0^2 l^2 b^2 h^2} \int_0^l \int_0^b \int_0^h \int_0^l \int_0^b \int_0^h K(\vec{r}, \vec{r}')\, dv dv'. \tag{3.41}$$

Для дисперсии дебита аналогом формул (3.14) и (3.15) является следующее соотношение

$$Dq = q_0^2 \zeta^2 \psi\,(l/a)\,\psi\,(b/a)\,\psi\,(h/a), \tag{3.42}$$

где функция $\psi = f$, если используется трехмерный аналог корреляционной функции (3.14) и $\psi = \varphi$ при корреляции типа (3.16).

Нетрудно видеть, что формулы для плоского течения (3.15) и (3.17) следуют из (3.42), если положить $h/a \to 0$.

Исследование асимптотики $< q_2 >$ при стремлении масштаба корреляции к нулю и конечных l, b, h приводит к формуле

$$< q_2 > = -q_0 \zeta^2 / 3. \tag{3.43}$$

Таким образом, для величины $\lambda = < q_2 > / q_0 \zeta^2$ можно написать единую формулу

$$\lambda = -1/n, \tag{3.44}$$

где n — размерность рассматриваемого пространства — течения (при линейном, плоском и пространственном течении $n = 1, 2, 3$ соответственно).

Подставляя в (3.40) функцию Грина соответствующей задачи для параллелепипеда и корреляционную функцию — пространственный аналог выражения (3.16), как и в плоском случае получим смещение дебита в виде комбинации рядов, сходимость которых можно улучшить методами, изложенными ранее. При $l = b = h$, как и в случае плоского течения, ряды суммируются в конечном виде, что позволяет записать

$$\lambda = -\frac{1}{3}[1 - \varphi^3\,(l/a)], \tag{3.45}$$

или, введя безразмерное смещение и дисперсию, запишем

$$\lambda = -\frac{1}{3}(1 - D_3). \tag{3.46}$$

Нетрудно заметить, что формулы (2.17), (3.35) и (3.46) можно объединить в одну

$$\lambda = -(1 - D_n)/n. \tag{3.47}$$

Как и в случае плоского течения, использование симметрии функции Грина и структуры формулы для смещения позволяет выписать соотношение для безразмерного смещения пространственного квазиодномерного течения

$$\lambda = -\frac{1}{6}[1 - \varphi(l/a)][2 + \varphi(b/a) + \varphi(h/a) + 2\varphi(b/a) \times \varphi(h/a)]. \tag{3.48}$$

Очевидно, что при $l = b = h$ формула (3.48) переходит в точную формулу (3.45), при $h/a \to 0$ из (3.48) следует формула (3.39). Если, кроме того, положить и $b/a \to 0$, то получим формулу (2.17) для одномерного течения. Таким образом, формула (3.48) — наиболее общая, охватывающая случаи пространственного, плоского и одномерного течений.

КВАЗИРАДИАЛЬНОЕ ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ К СКВАЖИНЕ

Рассмотрим установившееся течение к совершенной скважине, расположенной в центре кругового пласта постоянной толщины (рис. 11). Совместив с центром скважины начало полярной системы координат, будем искать в области $\rho \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ решение уравнения

$$L(k, p) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[k(r, \theta)\, r \frac{\partial p}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[k(r,\theta)\frac{\partial p}{\partial \theta}\right] = 0 \tag{3.49}$$

при условиях

$$p(\rho, \theta) = P_1 = \text{const}, \quad p(R, \theta) = P_2 = \text{const}. \tag{3.50}$$

К (3.50) следует присоединить условия периодичности случайных функций $k(r, \theta)$ и $p(r, \theta)$:

$$k(r, \theta) = k(r, \theta + 2\pi), \quad p(r, \theta) = p(r, \theta + 2\pi). \tag{3.51}$$

Проинтегрировав уравнение (3.49) в пределах от 0 до 2π с учетом условий (3.51), получим выражение для случайного дебита

$$Q = -\frac{hr}{\mu}\int_0^{2\pi} k(r, \theta)\frac{\partial p(r, \theta)}{\partial r}\, d\theta. \tag{3.52}$$

Представим случайные функции k, p и случайный дебит Q в виде

$$k = k_0 + k', \quad k_0 = \langle k \rangle, \quad p = p_0 + p_1 + p_2, \quad \theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 \tag{3.53}$$

и будем считать, что p_0 является периодическим по θ решением задачи

$$L(k_0, p_0) = 0,\ p_0(\rho, \theta) = P_1,\ p_0(R, \theta) = P_2. \tag{3.54}$$

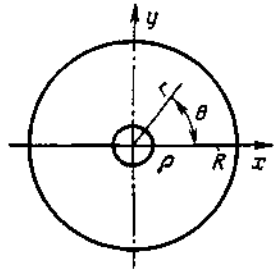


Рис. 11. Схема области квазиодномерного (квазирадиального) течения в круговом кольце

Соответственно

$$Q_0 = -\frac{hr}{\mu}\int_0^{2\pi} k_0 \frac{\partial p_0}{\partial r}\, d\theta. \tag{3.55}$$

Для p_1 и Q_1 имеем

$$L = (k_0, p_1) = -L(k', p_0),\ p_1(\rho, \theta) = p_1(R, \theta) = 0,$$

$$Q_1 = -\frac{hr}{\mu}\int_0^{2\pi}\left(k_0 \frac{\partial p_1}{\partial r} + k' \frac{\partial p_0}{\partial r}\right) d\theta. \tag{3.56}$$

Аналогично

$$L(k_0, p_2) = -L(k', p_1),\quad p_2(\rho, \theta) = p_2(R, \theta) = 0,$$

$$Q_2 = -\frac{hr}{\mu}\int_0^{2\pi}\left(k_0 \frac{\partial p_2}{\partial r} + k' \frac{\partial p_1}{\partial r}\right) d\theta. \tag{3.57}$$

Пусть $k_0 = \text{const}$. Тогда из (3.55), (3.56) и (3,57) получим

$$Q_0 = \frac{2\pi k_0 h (P_2 - P_1)}{\mu \ln R/\rho},\quad Q_1 = \frac{Q_0}{2\pi k_0 \ln R/\rho}\int_\rho^R \int_0^{2\pi} r^{-1} k'(r, \theta)\, dr d\theta,$$

$$Q_2 = -\frac{h}{\mu}\int_\rho^R \int_0^{2\pi} r k'(r, \theta) \frac{\partial p_1}{\partial r}\, dr d\theta. \tag{3.58}$$

Для определения Q_2 из (3.58) следует решить задачу (3.56), т. е. найти $p_1(r, \theta)$.

$$p_1(r, \theta) = \frac{Q_0}{2\pi k_0^2}\int_\rho^R \int_0^{2\pi} G(r, \theta, r', \theta') \frac{\partial k'(r', \theta')}{\partial r'}\, dr' d\theta', \tag{3.59}$$

где функция Грина G — периодическое решение следующей задачи:

$$\nabla^2_{r,\theta} G(r, \theta, r', \theta') = -\delta(r, \theta, r', \theta'), \tag{3.60}$$

$$G(R, \theta, r', \theta') = G(\rho, \theta, r', \theta') = 0.$$

Теперь запишем первые два момента дебита:

$$< Q > = Q_0\left[1 - \frac{1}{2\pi k_0^2}\int_\rho^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\rho^R\int_0^{2\pi} G_r' K_{r'}'\, dr d\theta dr' d\theta'\right],$$

$$DQ = \frac{Q_0^2 \lambda^*(\rho, \rho)}{4\pi^2 k_0^2 \ln^2 R/\rho}, \tag{3.61}$$

где

$$\lambda^*(z, u) = \int_z^R \int_0^{2\pi} \int_u^R \int_0^{2\pi} K(r, \theta, r', \theta') \frac{dr d\theta dr' d\theta'}{rr'}.$$

Определенный интерес представляет изучение флуктуаций среднего давления

$$\tilde{p}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \theta) d\theta. \tag{3.62}$$

Его дисперсия имеет вид

$$D\tilde{p}(r) = \frac{Q_0^2 \mu^2}{16 k_0^4 \pi^4 h^2} \left[\lambda^*(r, r) + \frac{\ln^2 R/r}{\ln^2 R/\rho} \lambda^*(\rho, \rho) - \frac{2 \ln R/r}{\ln R/\rho} \lambda^*(\rho, r) \right]. \tag{3.63}$$

Если корреляционная функция задана в форме

$$K = D \exp\left\{ -\frac{1}{a^2} [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')] \right\}, \tag{3.64}$$

интеграл λ^* можно представить как

$$\lambda^*(u, v) = \frac{4\pi^2 D}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-2} \lambda_n^*(u) \lambda_n^*(v), \tag{3.65}$$

где

$$\lambda_0^*(z) = \frac{a}{2} \left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{R^2}{a^2}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{z^2}{a^2}\right) \right],$$

$$\mathrm{Ei}(-z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-u}}{u} du,$$

при $n \geqslant 1$

$$\lambda_n^*(z) = -\frac{a}{2} [\gamma(n, R/a) - \gamma(n, z/a)], \tag{3.66}$$

$$\gamma(n, x) = e^{-x^2} \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p p! x^{2(n-p-1)}, \quad C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}.$$

Подробный вывод формул (3.65), (3.66) и рекомендации вычислений по ним приведены в [35].

Рассмотрим еще случай установившейся фильтрации в круговом пласте при заданном неслучайном дебите и фиксации давления на одном из контуров, например $p(R, \theta) = P_2 = \mathrm{const}$. После несложных преобразований из (3.56) нетрудно получить

$$D\tilde{p}(r) = \frac{Q_0^2 \mu^2}{16 \pi^4 k_0^4 h^2} \lambda^*(r, r). \tag{3.67}$$

Таким образом, нахождение дисперсий дебитов или давлений в конечном счете сводится к вычислению функций λ^*. Рассмотрим подробнее результаты таких вычислений для оценки дисперсии

ТАБЛИЦА 2

ρ, м	a, м									
	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	0,5	1	5	10	50	100	500
10^{-3}	0,00105 0,0324	0,02901 0,1703	0,12325 0,3511	0,22995 0,4795	0,28622 0,5350	0,44089 0,6640	0,51782 0,7196	0,72040 0,8488	0,81767 0,9043	0,98110 0,9905
10^{-2}	0 0	0,00158 0,0397	0,04369 0,2090	0,13200 0,3634	0,18564 0,4309	0,34634 0,5885	0,43111 0,6566	0,66397 0,8148	0,77937 0,8828	0,97670 0,9883
10^{-1}	0 0	0 0	0,00265 0,05148	0,03579 0,1892	0,07320 0,2706	0,22116 0,4703	0,31103 0,5577	0,58011 0,7617	0,72135 0,8493	0,97017 0,9850
0,5	0 0	0 0	0,000027 0,0052	0,00420 0,06481	0,01507 0,1228	0,11604 0,3407	0,20051 0,4478	0,49272 0,7019	0,65890 0,8118	0,96268 0,9812
1	0 0	0 0	0 0	0,00165 0,0406	0,00531 0,07287	0,07177 0,2679	0,14681 0,3832	0,44313 0,6657	0,62188 0,7886	0,95685 0,9782
5	0 0	0 0	0 0	0 0	0,000068 0,0082	0,01058 0,1029	0,03802 0,1950	0,29205 0,5404	0,50222 0,7087	0,94127 0,9702
10	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0,00486 0,06972	0,01563 0,1250	0,21008 0,4583	0,42681 0,6533	0,92911 0,9639

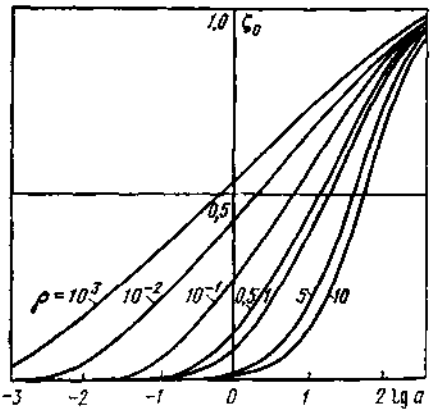


Рис. 12. Зависимость безразмерного среднего квадратического отклонения дебита квазирадиального течения от масштаба a для различных ρ при $R=250$ м

дебита. В табл. 2 приведены вычисленные значения безразмерной дисперсии дебита ξ_0^2

$$\xi_0^2 = \frac{D[Q]\,k_0^2}{D[k]\,Q_0^2}$$

и ξ_0 в виде дроби ξ_0^2/ξ_0. При этом $R = 250$ м, а величины ρ и a меняются в довольно широком диапазоне. Как известно, учет несовершенства скважин приводит к необходимости использовать в расчетах приведенные радиусы скважин, обычно значительно отличающиеся от геометрического радиуса.

Нетрудно видеть, что при больших, сравнимых с R, величинах a уменьшение ρ слабо отражается на ξ_0^2, а тем более на ξ_0. Если же a сравнимо с истинным геометрическим радиусом, учет несовершенства может оказаться существенным и с точки зрения вариации дебита. Пусть, например, при $R = 250$ м и $a = 1$ м истинный радиус скважины $\rho_0 = 0{,}1$ м. В соответствии с таблицей в этом случае $\zeta_0 = 0{,}271$. Если при тех же условиях взять $\rho_0 = 10^{-3}$ м, получим $\zeta_0 = 0{,}535$, т. е. уменьшение радиуса скважины в 100 раз увеличило относительный доверительный интервал для дебита почти в 2 раза.

С другой стороны, очевидно, что при a, сравнимых с ρ, а тем более значительно меньших ρ, изменение радиуса контура питания R слабо отражается на ζ_0.

Зависимости ζ_0 от lg a при фиксированных ρ и $R = 250$ м приведены на рис. 12. Нетрудно убедиться, что если масштаб неоднородности a равен или превышает $(5—10)\rho$, то величина $\zeta_0 \geqslant 0{,}2$, т. е. вариация безразмерного дебита существенна. Поскольку в ближайшей окрестности скважины концентрируется значительная часть общего сопротивления, соизмеримость призабойной зоны с масштабом неоднородности определяет вариацию дебита.

Перейдем к определению среднего дебита скважины Как и в случае квазиодномерного течения, нетрудно показать, что если $R/a \gg 1$ и $\rho/a \gg 1$

$$< Q > = Q_0 (1 - \xi^2/2). \qquad (3.68)$$

Если же $R/a \ll 1$ и $\rho/a \ll 1$, вполне очевидно, что $< Q > = Q_0$. Рассмотрим другие предельные случаи. Если зафиксировать R и a, уменьшая при этом ρ, можно получить

$$\lim_{\rho \to 0} < Q > / Q_0 = 1. \qquad (3.69)$$

Зафиксировав ρ и a и увеличивая R, получим

$$\lim_{R\to\infty} <Q>/Q_0 = 1 - \xi^2/2. \qquad (3.70)$$

Если равенство (3.69) достаточно очевидно, то для объяснения (3.70) следует учесть, что с увеличением R при фиксированных ρ и a растет область, для которой неоднородности являются мелкомасштабными. Поскольку с ростом R влияние этой зоны на дебит увеличивается, по существу этот случай близок, а в пределе совпадает с (3.68). Заметим, что в [45] при анализе этого случая допущена неточность, приводящая к потере двойки в формуле (3.70).

К сожалению, вычисление интеграла (3.61) в общем случае сопряжено с большими трудностями. Использованные автором в [35] упрощающие предположения, связанные с применением теоремы о среднем, в определенных ситуациях, в частности при малых a, приводят к большим погрешностям. Значительные сложности связаны и с численным интегрированием (3.61), поскольку даже запись функции Грина для кольцевой области $\rho<r<R$ сопряжена с трудностями. Далее, как и в случае течения в полосе, предлагается соотношение, верное во всех рассмотренных асимптотических случаях. Если в случае квазиодномерного течения прямые расчеты подтвердили формулу, предложенную в виде гипотезы, для квазирадиального течения этого пока сделать не удалось. Поэтому предлагаемую формулу можно использовать для оценок, не претендующих на высокую точность.

Итак,

$$<Q> = Q_0\left[1 - \frac{\xi^2}{2}\left(1 - \frac{DQ}{Q_0^2}\right)\right]. \qquad (3.71)$$

Легко заметить, что формула (3.71) лишь двойкой в знаменателе отличается от формулы (2.20) для дебита чисто радиального течения и совпадает с формулой (3.35) для течения в квадратном пласте. Нетрудно проверить, что в случае мелко- и крупномасштабных неоднородностей формула (3.71) дает точный результат.

Как уже подчеркивалось, главное влияние на поправку к невозмущенному дебиту Q_0 оказывают два конкурирующих механизма: последовательного и параллельного течений. В случае двумерного изотропного поля и течения в круговом пласте к центральной скважине получить в чистом виде механизм последовательного течения нельзя. Что касается чисто параллельного течения, то к нему близка следующая схема, практически мало интересная. Это течение в тонком кольце $\rho < r < R$ при таких условиях

$$\rho/a \gg 1, \quad R/a \gg 1, \quad (R-\rho)/a \ll 1.$$

В этом случае малы и безразмерная дисперсия, и смещение дебита, т. е. формула (3.71) непригодна.

ВЛИЯНИЕ ИНФОРМАЦИИ О ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЕ СКВАЖИНЫ НА ТОЧНОСТЬ ПРОГНОЗА ЕЕ ДЕБИТА

В случае притока к скважине малого радиуса при достаточно больших масштабах неоднородности дисперсия дебита весьма ощутима, тем самым определяя невысокое качество прогноза дебита отдельных скважин. Можно полагать, что причиной такого положения является некоторая специфичность радиальных течений к скважинам малого радиуса, связанная с локализацией значительной части фильтрационного сопротивления в призабойной зоне скважин.

Предполагая случайную функцию — проницаемость стохастически однородной, мы тем самым считаем ее одинаково известной (неизвестной) в различных точках пласта как близких, так и удаленных от скважины. Очевидно, локализация сопротивления в призабойной зоне повышает информационный вес параметров призабойной зоны, и знание или незнание параметров этих зон достаточно существенно отражается на качестве прогноза дебита скважин.

Далее приводятся результаты оценки использования дополнительной информации о строении призабойной зоны пласта с точки зрения повышения точности прогноза, тем более, что призабойная зона пласта обычно доступна для получения информации о ее структуре [36].

Пусть в результате каких-либо исследований получена информация о распределении проницаемости в призабойной зоне скважины. Например, удалось точно измерить проницаемость призабойной зоны. Естественно, что проницаемость в этой зоне не следует считать случайной. Поэтому, если радиус окрестности ρ_1, то при выполнении любого из неравенств $r < \rho_1$, либо $r' < \rho_1$ будет

$$K(r, \theta, r', \theta') = 0. \tag{3.72}$$

Очевидно, точное знание проницаемости в зоне $\rho < r < \rho_1$ должно повысить качество прогноза дебита скважины. Если считать, что точное значение проницаемости в кольце $\rho < r < \rho_1$ равно k_1, то для безразмерной дисперсии дебита получим

$$\xi_1^2 = \frac{D[Q_1]\, k_0^2}{Q_1^2 D} = \frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k_1}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + \ln\frac{R}{\rho_1}\right)^{-2}\left\{[\mathrm{Ei}(-R^2/a^2) - \mathrm{Ei}(-\rho_1^2/a^2)]^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[\gamma(n, R/a) - \gamma(n, \rho_1/a)]^2\right\}. \tag{3.73}$$

В табл. 3 при использованных ранее R, ρ и a представлены значения ξ_1^2 и отношения Q_0/Q_1, записанные в виде дроби, числитель которой ξ_1, а знаменатель — отношение дебитов как функции соотношений k_0/k_1 и радиуса ρ_1, измеренного в метрах. При этом в таблице рассмотрен лишь случай $0 \leqslant k_0/k_1 \leqslant 1$, т. е. призабойная зона имеет проницаемость большую, чем средняя по остальной части пласта. Нетрудно видеть, что чем больше отличается k_1 от k_0, тем

ТАБЛИЦА 3

k_0/k_1	ρ_1						
	0.1	0,2	0,5	1,0	5,0	10,0	50,0
0	0,9850 / 1	0,9831 / 0,9114	0,9807 / 0,7943	0,9792 / 0,7057	0,9700 / 0,5000	0,9626 / 0,4114	0,9285 / 0,2057
0,1	0,9850 / 1	0,9737 / 0,9202	0,9561 / 0,8148	0,9400 / 0,7351	0,8820 / 0,5499	0,8422 / 0,4702	0,7473 / 0,2556
0,5	0,9850 / 1	0,9375 / 0,9557	0,8683 / 0,8971	0,8103 / 0,8528	0,6467 / 0,7499	0,5612 / 0,7056	0,3169 / 0,6027
1	0,9850 / 1	0,8960 / 1	0,7790 / 1	0,6910 / 1	0,4850 / 1	0,3960 / 1	0,1910 / 1
2	0,9850 / 1	0,8231 / 0,9186	0,6461 / 0,8294	0,5339 / 0,7726	0,3233 / 0,6667	0,2493 / 0,6294	0,1064 / 0,5573
5	0,9850 / 1	0,6617 / 0,7385	0,4274 / 0,5487	0,3174 / 0,4594	0,1617 / 0,3334	0,1181 / 0,2982	0,0457 / 0,2394
10	0,9850 / 1	0,4985 / 0,5564	0,2732 / 0,3507	0,1894 / 0,2740	0,0882 / 0,1818	0,0629 / 0,1587	0,0234 / 0,1227
100	0,9850 / 1	0,0917 / 0,1023	0,0364 / 0,0468	0,0229 / 0,0332	0,0096 / 0,0198	0,0067 / 0,0169	0,0024 / 0,0125

Примечание. $R = 250$ м. $\rho = 0{,}1$ м. $a = 500$ м.

слабее уменьшается относительная безразмерная дисперсия дебита, хотя дебит Q_1 при больших ρ_1 может существенно отличаться от Q_0. При небольших ρ_1, имеющих порядок метра и менее, и ξ_1 и Q_0/Q_1 слабо зависят от отношения k_0/k_1. Таким образом, уточнение проницаемости в небольшой призабойной зоне, если уточненное значение k_1 больше математического ожидания k_0, дает малую информацию. Доверительный интервал для дебита меняется незначительно.

В табл. 4 представлены значения ξ_1 и Q_1/Q_0 для тех же значений ρ, но k_0/k_1, больших 1, т. е. в тех случаях, когда уточненная проницаемость призабойной зоны меньше, чем k_0. Теперь коэффициент вариации дебита, так же как и сам дебит, существенно зависит от k_0/k_1. Так, например, при $\rho_1 = 1$ м и $k_0/k_1 = 5$ средний дебит уменьшается по сравнению с первоначальным примерно в 2 раза, а ширина доверительного интервала почти в 3 раза. Очевидно, уточнение параметров призабойной зоны в этом случае дает существенную информацию и значительно улучшает качество прогноза.

В табл. 5, 6, 7 аналогичные подсчеты проведены при том же R, что и ранее, но при $a = 10$ и 1 м и $\rho = 0{,}1$ и 0,001 м, что скорее соответствует модели сравнительно мелкомасштабной неоднородности. И в этом случае отмечаются те же эффекты, даже в более явной форме. Сравнение таблиц показывает, что при $a = 1$ м, даже в случае $k_0 < k_1$, но при достаточно большом ρ_1, доверительный интервал для дебита значительно сужается. Еще быстрее ζ_1 убывает при $k_0 > k_1$.

ТАБЛИЦА 4

k_0/k_1	ρ_1			
	0,1	0,2	0,5	1
0	0,557 / 1	0,516 / 0,911	0,448 / 0,794	0,383 / 0,706
0,1	0,557 / 1	0,511 / 0,920	0,436 / 0,814	0,368 / 0,735
0,5	0,557 / 1	0,492 / 0,956	0,396 / 0,897	0,327 / 0,853
1	0,557 / 1	0,470 / 1,000	0,355 / 1,000	0,270 / 1,000
2	0,557 / 1	0,432 / 0,919	0,295 / 0,829	0,204 / 0,773
5	0,557 / 1	0,347 / 0,738	0,195 / 0,549	0,124 / 0,459
10	0,557 / 1	0,261 / 0,556	0,124 / 0,351	0,074 / 0,274
100	0,557 / 1	0,048 / 0,102	0,017 / 0,047	0 / 0,033

Примечание. $R = 250$ м, $\rho = 0{,}1$ м, $a = 10$ м.

ТАБЛИЦА 5

k_0/k_1	ρ_1			
	0,1	0,2	0,5	1
0	0,270 / 1	0,208 / 0,911	0,119 / 0,794	0,082 / 0,706
0,1	0,270 / 1	0,207 / 0,920	0,116 / 0,814	0,078 / 0,735
0,5	0,270 / 1	0,198 / 0,956	0,105 / 0,897	0,067 / 0,853
1	0,270 / 1	0,189 / 1,000	0,094 / 1,000	0,058 / 1,000
2	0,270 / 1	0,174 / 0,919	0,078 / 0,829	0,044 / 0,773
5	0,270 / 1	0,140 / 0,738	0,052 / 0,549	0,026 / 0,459
10	0,270 / 1	0,105 / 0,556	0,033 / 0,351	0,016 / 0,274
100	0,270 / 1	0,019 / 0,102	0,001 / 0,047	0 / 0,033

Примечание. $R = 250$ м, $\rho = 0{,}1$ м, $a = 1$ м.

ТАБЛИЦА 6

k_0/k_1	ρ_1				
	0,001	0,1	0,2	0,5	1
0	0,719 / 1	0,557 / 0,629	0,515 / 0,574	0,448 / 0,500	0,121 / 0,444
0,1	0,719 / 1	0,526 / 0,666	0,480 / 0,616	0,407 / 0,550	0,108 / 0,499
0,5	0,719 / 1	0,431 / 0,814	0,376 / 0,786	0,298 / 0,751	0,074 / 0,722
1	0,719 / 1	0,351 / 1	0,296 / 1	0,224 / 1	0,054 / 1
2	0,719 / 1	0,256 / 0,729	0,207 / 0,701	0,149 / 0,666	0,034 / 0,642
5	0,719 / 1	0,141 / 0,402	0,109 / 0,369	0,074 / 0,333	0,017 / 0,310
10	0,719 / 1	0,081 / 0,230	0,061 / 0,204	0,040 / 0,181	0,009 / 0,166
100	0,719 / 1	0,009 / 0,026	0 / 0,023	0 / 0,019	0 / 0,017

Примечание. $R = 250$ м. $\rho = 0.001$ м, $a = 10$ м.

ТАБЛИЦА 7

k_0/k_1	ρ_1				
	0,001	0,1	0,2	0,5	1
0	0,535 / 1	0,270 / 0,629	0,208 / 0,574	0,119 / 0,500	0,082 / 0,444
0,1	0,535 / 1	0,255 / 0,666	0,194 / 0,616	0,109 / 0,550	0,073 / 0,499
0,5	0,535 / 1	0,209 / 0,814	0,151 / 0,786	0,079 / 0,751	0,050 / 0,722
1	0,535 / 1	0,170 / 1	0,119 / 1	0,059 / 1	0,036 / 1
2	0,535 / 1	0,124 / 0,729	0,083 / 0,701	0,040 / 0,666	0,023 / 0,642
5	0,535 / 1	0,068 / 0,402	0,044 / 0,369	0,020 / 0,333	0,011 / 0,310
10	0,535 / 1	0,039 / 0,230	0,024 / 0,204	0,011 / 0,181	0,006 / 0,166
100	0,535 / 1	0 / 0,026	0 / 0,023	0 / 0,019	0 / 0,017

Примечание. $R = 250$ м, $\rho = 0{,}001$ м, $a = 1$ м.

В целом анализ таблиц показывает, что эффективность информации о призабойной зоне с точки зрения уменьшения доверительного интервала зависит в основном от таких характеристик, как масштаб неоднородности и k_0/k_1. При крупномасштабной неоднородности уточнение параметров призабойной зоны целесообразно лишь в том случае, когда ее истинная проницаемость меньше, чем средняя по пласту, а сама ухудшенная зона имеет существенные, по сравнению с радиусом скважины, размеры. Так как на практике именно такой случай является типичным (так называемый скин-эффект, объясняемый загрязнением призабойной зоны при бурении скважины), то следует применять методы исследования, дающие возможность уточнения параметров призабойной зоны.

В случае мелкомасштабной неоднородности уточнение параметров призабойной зоны оказывается эффективным и тогда, когда проницаемость призабойной зоны (истинная) больше, чем средняя по пласту. Дополнительная информация тем более эффективна, чем меньше a и больше отношение k_0/k_1. В таком случае дополнительные сведения о призабойной зоне являются важным способом увеличения точности прогноза независимо от того, ухудшенной или улучшенной является призабойная зона по отношению к остальному пласту.

При этом следует учитывать, что в случае мелкомасштабной неоднородности обычно значителен коэффициент вариации проницаемости, величине которого пропорциональна ширина доверительного интервала. Очевидно, это обстоятельство должно существенным образом стимулировать получение дополнительной информации о строении призабойной зоны скважин.

ГЛАВА 4

ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКА ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

При исследовании задач фильтрации в средах со случайными неоднородностями, как и в соответствующих задачах в детерминистической постановке, фундаментальную роль играет решение специальной задачи об источнике в неограниченной среде. Естественно, что это решение, или иначе функция Грина, является случайной функцией координат или координат и времени (в нестационарных задачах). Представляет интерес найти среднюю функцию Грина и другие ее моменты. Как и обычно, с помощью функции Грина можно конструировать решения прямых и обратных задач для сред со случайными неоднородностями, но, что особенно важно для задач фильтрации, функция является хорошей моделью течения в окрестности скважин малого радиуса. Особый интерес представляет функция Грина для стратифицированного пространства. В этом случае, достаточно типичным для задач электрического каротажа скважин, знание средней функции

Грина, ее дисперсии, корреляции с полем параметра проводимости дает возможность провести статистический анализ процесса каротирования тонкочередующихся пластов [36].

Уже давно решение типа точечного источника для нестационарной фильтрации в однородной слабосжимаемой среде применяется для исследования прямых и особенно обратных задач упругого режима фильтрации. Построение функции Грина подобной задачи в неоднородной среде, параметры которой случайны, дает возможность решать соответствующие прямые и обратные задачи для таких сред.

ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКА В ЗАДАЧЕ О СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в начале координат плоскости (x, y) функционирует источник постоянной единичной интенсивности. Будем искать $p(\vec{r})$ — решение задачи

$$\vec{V} = -k \nabla p, \quad \operatorname{div} \vec{V} = \delta(\vec{r}), \tag{4.1}$$

представив, как обычно, заданную функцию $k(\vec{r})$ и используя $\vec{V}(\vec{r})$ и $p(\vec{r})$ в виде

$$k = k_0 + k', \; k_0 = \langle k \rangle = \text{const}, \; p = p_0 + p_1 + p_2, \; \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \tag{4.2}$$

Тогда (4.1) соответствуют в рассматриваемом приближении системы

$$\vec{V}_0 = -k_0 \nabla p_0, \quad \operatorname{div} \vec{V}_0 = \delta(\vec{r}), \tag{4.3}$$

$$\vec{V}_1 = -k' \nabla p_0 - k_0 \nabla p_1, \quad \operatorname{div} \vec{V}_1 = 0, \tag{4.4}$$

$$\vec{V}_2 = -k' \nabla p_1 - k_0 \nabla p_2, \quad \operatorname{div} \vec{V}_2 = 0. \tag{4.5}$$

Если поле $k(\vec{r})$ статистически однородно и изотропно, из условий симметрии вытекает, что $\langle \vec{V} \rangle = \varphi(|\vec{r}|)\vec{r}$, где φ — функция, подлежащая определению. С другой стороны, усреднив (4.1), имеем уравнение $\operatorname{div} \langle V \rangle = \delta(\vec{r})$, сравнив которое с (4.3), получим соотношение $\langle \vec{V} \rangle = \vec{V}_0$.

Поскольку по построению приближений $\langle \vec{V} \rangle = \vec{V}_0$, из (4.2) вытекает $\langle \vec{V}_2 \rangle = 0$ и, следовательно,

$$\nabla \langle p_2 \rangle = -\frac{1}{k_0} \langle k' \nabla p_1 \rangle, \tag{4.6}$$

а для вычисления $p_1(\vec{r})$ нужно решить уравнение

$$\nabla^2 p_1 = -\frac{1}{k_0}\left[-\frac{k'}{k_0}\delta(\vec{r}) + \frac{1}{k_0}\nabla k' \nabla_{r'} G(r, 0)\right] = -\frac{1}{k_0}\varphi(\vec{r}), \quad (4.7)$$

где $G(\vec{r}, \vec{r}')$ — функция Грина задачи (4.1) при $k = 1$, т. е.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\vec{\rho}|}, \quad \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}'. \quad (4.8)$$

Записав решение (4.7) в виде

$$p_1(\vec{r}) = \frac{1}{k_0}\int \varphi(\vec{r}')\, G(\vec{r}, \vec{r}')\, dr'^2 \quad (4.9)$$

и подставив его в (4.6), после усреднения получим

$$\nabla < p_2 > = \frac{K(\vec{r}, 0)}{k_0^3}\nabla_r G(\vec{r}, 0) - \frac{1}{k_0^3}\int (\nabla_{r'} K(\vec{r}, \vec{r}')\nabla_{r'} \times$$

$$\times\, G(\vec{r}', 0)\nabla_r G(\vec{r}, \vec{r}')\, dr'^2 \quad (4.10)$$

где $K(\vec{r}, \vec{r}')$ — корреляционная функция проницаемости.

Вычисление (4.10) в общем случае затруднительно. Пусть для определенности

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = D\exp(-\rho^2/a^2), \quad \rho = |\vec{\rho}|. \quad (4.11)$$

Тогда для крупномасштабного поля, т. е. при $a \to \infty$, имеем

$$\nabla < p_2 > = \frac{D}{k_0^3}\nabla_r G(\vec{r}, 0). \quad (4.12)$$

Сравнительно просто вычисляется градиент среднего давления и при $a \to 0$. В этом случае

$$\nabla_{r'} K(\vec{r}, \vec{r}') = 2\pi D\vec{\rho}\,\delta(\vec{\rho}) \quad (4.13)$$

$$\nabla < p_2 > = -\frac{D}{2\pi k_0^3}\int \frac{(\vec{\rho r'})\vec{\rho}}{|\vec{r}'|^2 |\vec{\rho}|^2}\delta(\rho)\, dr'^2. \quad (4.14)$$

Вычислим

$$\frac{\partial < p_2 >}{\partial x} = -\frac{D}{2\pi k_0^3}\left[\int \frac{x'(x-x')^2}{|\vec{r}'|^2 |\vec{\rho}|^2}\delta(\vec{\rho})\, dr'^2 + \right.$$

$$\left. + \int \frac{(x-x')(y-y')y'}{|\vec{r}'|^2 |\vec{\rho}|^2}\delta(\vec{\rho})\, dr'^2\right].$$

При $x, y \neq 0$ второй интеграл равен нулю и

$$\frac{\partial < p_2 >}{\partial x} = -\frac{D}{4\pi k_0^3}\int \frac{x'}{|\vec{r}'|^2}\delta(\vec{\rho})\, dr'^2 = \frac{D}{2k_0^3}G_x(\vec{r}, 0).$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial < p_2 >}{\partial y} = \frac{D}{2k_0^3} G_y(\vec{r}, 0)$$

и, следовательно,

$$\nabla < p > = (1 + \zeta^2/2) k_0^{-1} \nabla_r G(\vec{r}, 0). \quad (4.15)$$

Проинтегрировав (4.12) и (4.15), получим соответственно для крупно- и мелкомасштабных неоднородностей

$$< p > = (1 + \zeta^2) k_0^{-1} G(\vec{r}, 0), \quad < p > = (1 + \zeta^2/2) k_0^{-1} G(\vec{r}, 0). \quad (4.16)$$

Для источника единичной интенсивности, находящегося в начале координат трехмерного пространства, можно провести почти аналогичный анализ, в результате которого имеем для случаев крупно- и мелкомасштабных неоднородностей

$$< p > = (1 + \zeta^2) k_0^{-1} \tilde{G}(\vec{r}, 0), \quad < p > = (1 + \zeta^2/3) k_0^{-1} \tilde{G}(\vec{r}, 0), \quad (4.17)$$

где функция Грина $\tilde{G}$ определяется по формулам $\tilde{G}(\vec{r}, 0) = 1/4\pi r$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК ПОЛЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КАРОТАЖ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрение задачи о поле точечного источника в среде со случайными неоднородностями, иначе говоря построение средней функции Грина, целесообразно распространить на важный класс неоднородных сред, которые принято называть стратифицированными. В самом деле, широко распространенный механизм осадконакопления в достаточно спокойных условиях приводит к тому, что реальным пористым средам обычно свойствен характер слоистой системы. Наличие большого количества слоев при достаточной вариации их свойств предопределяет естественность трактовки такой системы как случайной, параметры которой являются случайной функцией лишь одной координаты, ось которой обычно направлена вдоль вертикали [36].

Далее мы рассмотрим задачу о стационарном поле точечного источника в стратифицированной случайной среде. Зависимость проводимости такого поля лишь от одной переменной позволяет изучить поле источника значительно подробнее, чем это удавалось в случае изотропных систем. Полученные далее результаты вследствие электрогидродинамической аналогии автоматически переносятся на случай рассмотрения электрического поля в неоднородных по проводимости средах, лежащий в основе теории электрического каротажа. Учитывая важность прикладного аспекта подобной теории, дальнейшее изложение будем вести в ее терминах.

Как известно, одним из самых информативных методов изучения неоднородности разреза скважин является электрический каротаж. Теория электрического каротажа по методу сопротивлений основана на использовании решений уравнений потенциала для сред с разного вида регулярными неоднородностями, представленными обычно в виде так называемых палеток. Сравнение измеренного поля с палетками позволяет выделить из них наиболее согласующуюся с измеренным полем и тем самым высказать правдоподобные суждения о строении каротируемого разреза. Однако при достаточно большом количестве поверхностей раздела формулы теории становятся весьма громоздкими, и использование их для анализа и интерпретации затруднительно. Поэтому обычно мелкомасштабные аномалии поля не интерпретируются, что, безусловно, приводит к потере информации о строении каротируемой среды. По-видимому, выход в этом случае должен быть связан с использованием статистического подхода и созданием адекватного метода расчета и интерпретации. Кроме того, статистическая теория каротажа позволит с некоторой новой точки зрения оценить и проанализировать известные стандартные методы каротирования и наметить пути их совершенствования.

Рассматривая задачу о поле в стратифицированной среде, будем пренебрегать влиянием на него скважины, бурового раствора и т. д. Хотя эти факторы оказывают значительное влияние на поле, это влияние регулярно и при статистическом анализе, по-видимому, его можно исключать.

Итак, пусть в начале координат пространства $\vec{r}(x, y, z)$ расположен точечный источник электрического тока интенсивности I. Будем считать, что проводящая среда стратифицирована таким образом, что проводимость ее зависит лишь от одной координаты, например z. Тогда потенциал электрического поля в пространстве определяется в результате решения уравнения

$$k(z)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{dk(z)}{dz}\frac{\partial u}{\partial z}=-I\delta(\vec{r}) \tag{4.18}$$

при условии

$$\lim_{|\vec{r}|\to\infty} u(\vec{r})=0. \tag{4.19}$$

Будем считать, что проводимость $k(z)$ является случайной функцией координаты z, и займемся поисками статистических характеристик решения $u(\vec{r})$ в зависимости от характеристик проводимости $k(z)$. Очевидно, выполнение этой программы в общем случае весьма затруднительно, и потому дальнейшее изложение будет связано с построением приближенных решений задачи, основанном на использовании методов теории возмущений.

Будем полагать, что случайная проводимость представлена в виде

$$k(z)=k_0+k'(z),\ k_0=<k(z)>=\text{const} \tag{4.20}$$

и решение $u(\vec{r})$ искать в виде ряда

$$u = u_0 + u_1 + \ldots, \tag{4.21}$$

где функции u_l определяются следующим образом.

Нулевое приближение u_0 есть решение невозмущенной задачи, т. е. задачи (4.18) — (4.19) при условии, что $k(z) = k_0$. Очевидно, уравнение для невозмущенной задачи можно записать так:

$$\nabla^2 u_0 = -Ik_0^{-1}\delta(\vec{r}). \tag{4.22}$$

Чтобы получить уравнение для u_1, следует в (4.18) подставить $u = u_0 + u_1$ и, отбросив члены, квадратичные по флуктуациям, а также учитывая уравнение для u_0, написать

$$\nabla^2 u_1 = -k_0^{-1}\left(k'\nabla^2 u_0 + \frac{dk'}{dz}\frac{\partial u_0}{\partial z}\right). \tag{4.23}$$

Поступая аналогично и далее, нетрудно записать для любого номера n

$$\nabla^2 u_n = -k_0^{-1}\left(k'\nabla^2 u_{n-1} + \frac{dk'}{dz}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial z}\right) = -\varphi_n(z). \tag{4.24}$$

Очевидно, что для всех u_n должно выполняться условие (4.19).

Как известно, решение задачи (4.24), (4.19) можно представить в виде

$$u_n(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}')\,\varphi_n(\vec{r}')\,dr'^3, \tag{4.25}$$

где интегрирование производится по всему пространству, а функция Грина G есть вырождающееся на бесконечности решение уравнения

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{4.26}$$

которое, как известно, имеет вид

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 1/4\pi\,|\vec{r} - \vec{r}'|. \tag{4.27}$$

Таким образом, формулы (4.27), (4.25) и (4.21) дают возможность записать решение исходной задачи и перейти к ее статистическому анализу. В то же время очевидно, что вычисление u_n и соответствующих статистических моментов при достаточно больших n связано со значительными трудностями. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся исследованием так называемого борновского приближения, т. е. анализом поля, образующегося от рассеяния невозмущенного решения u_0 на неоднородностях k'. Легко заметить, что для вычисления среднего поля $\langle u \rangle$ этого приближения недостаточно. Ограничившись в этом случае лишь исследованием асимптотического случая мелкомасштабных неоднородностей, основные усилия сосредоточим на вычислении вторых моментов поля или его производных.

Вычисление среднего поля

Используя (4.22), нетрудно написать

$$u_0(\vec{r}) = Ik_0^{-1}G(\vec{r},\ 0). \tag{4.28}$$

Подставляя (4.28) и (4.23), получим уравнение для u_1

$$\nabla^2 u_1 = Ik_0^{-2}\left[k'(z)\,\delta(\vec{r}) - \frac{dk'}{dz}G_z'(\vec{r},\ 0)\right]. \tag{4.29}$$

Вычислим u_1 и подставив его в уравнение для u_2, получим после усреднения по вероятности

$$\nabla^2 < u_2 > = -\frac{ID}{k_0^3}\delta(\vec{r}) + \frac{I}{k_0^3}G_z'(\vec{r},\ 0)K_z'(z,\ 0) +$$

$$+ \frac{I}{k_0^3}\int G_z'(\vec{r},\ \vec{r}')\,G_{z'}'(\vec{r}',\ 0) > k_{z,z'}''(z,\ z')\,dr'^3. \tag{4.30}$$

Здесь $K(z,\ z') = < k'(z)\,k'(z') >$ — корреляционная функция проводимости; $D = K(0,\ 0)$ — ее дисперсия.

Поскольку вычисление интеграла в (4.30) сопряжено с большими трудностями, рассмотрим лишь случай, когда масштаб корреляции проводимости весьма мал по сравнению с z. Легко видеть, что среда в этом случае эквивалентна однородно-анизотропной среде, проводимость которой в направлении x и y равна k_0, а в направлении z равна $k_1 = < 1/k >^{-1}$.

Для среднего поля в этом случае можно записать уравнение

$$k_0\left(\frac{\partial^2 < u >}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 < u >}{\partial y^2}\right) + k_1\frac{\partial^2 < u >}{\partial z^2} = -I\delta(\vec{r}), \tag{4.31}$$

решение которого имеет вид

$$< u > = \frac{I\lambda}{4\pi k_0}(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)^{-1/2},\ \lambda^2 = k_0/k_1. \tag{4.32}$$

На оси z ($x = 0,\ y = 0$) решение запишется так

$$< u > = I/4\pi k_0 z, \tag{4.33}$$

т. е. будет тождественно решению в однородной среде проводимости k_0. Последнее обстоятельство очень важно, так как позволяет с достаточным основанием использовать на оси z в качестве среднего поля невозмущенное решение u_0. Интересно отметить и связь коэффициента предельной анизотропии λ с характеристиками случайной функции k. В самом деле,

$$k_1 = < 1/k >^{-1} = < \frac{1}{k_0 + k'} >^{-1} = < \frac{1}{k_0(1 + k'/k_0)} >^{-1} =$$

$$= < \frac{1}{k_0}\left(1 - \frac{k'}{k_0} + \frac{k'^2}{k_0^2} - \ldots\right) >^{-1} = \left[\frac{1}{k_0}\left(1 + \frac{D}{k_0^2} + \ldots\right)\right]^{-1}. \tag{4.34}$$

Ограничиваясь малыми второго порядка, получим

$$k_1 = k_0 (1 + \zeta^2)^{-1}, \quad \zeta^2 = D/k_0^2, \tag{4.35}$$

или для коэффициента анизотропии

$$\lambda = (1 + \zeta^2)^{-1/2}. \tag{4.36}$$

Интересно, что формулы (4.35) и (4.36), являясь приближенными для любых распределений случайной величины k при достаточно малых флуктуациях, являются точными в случае, если k распределено согласно нормально логарифмическому закону или некоторым его модификациям. Если масштаб корреляции велик по сравнению с z, то, очевидно, $k_1 = k_0$ и $\lambda = 1$.

Следует помнить, что формулы (4.31) — (4.33) годятся лишь в случае малых масштабов корреляции. Критерием малости последних может быть малость безразмерной дисперсии решения по сравнению с единицей. Как будет показано далее, критерий этот выполняется в довольно широком диапазоне изменения параметров задачи.

Корреляция флуктуаций поля и его дисперсия

Начнем с вычисления корреляции флуктуаций поля, а затем найдем дисперсию как частный случай корреляции.

Используя равенства (4.23) и (4.25), можно записать

$$u_1(\vec{r}) = -\frac{l}{k_0^2}\left[G(\vec{r},\ 0)\,k'(0) - \int G(\vec{r},\ \vec{r}')\,G'_{z'}(\vec{r}',\ 0)\,\frac{dk'}{dz'}\,dr'^3\right]. \tag{4.37}$$

Отсюда для корреляционного момента флуктуаций поля

$$H_1(\vec{r}_1,\ \vec{r}_2) = \langle u_1(\vec{r}_1)\,u_2(\vec{r}_2)\rangle \tag{4.38}$$

получим соотношение

$$H_1(\vec{r}_1,\ \vec{r}_2) = \frac{l^2}{k_0^4}\Big|DG(\vec{r}_1,\ 0)\,G(\vec{r}_2,\ \vec{0}) + \int\int G(\vec{r}_1,\ \vec{r}')\,G(\vec{r}_2,\ \vec{r}'') \times$$

$$\times\, G'_{z'}(\vec{r}',\ \vec{0})\,G'_{z''}(\vec{r}'',\ 0)\,K''_{z'z''}\,dr'^3 dr''^3 - G(\vec{r}_1,\ 0)\int G(\vec{r}_2\vec{r}'')G'_{z''}(r'',\ 0) \times$$

$$\times\, K_{z''}(0,\ z'')\,dr''^3 - G(r_2,\ 0)\int G(\vec{r}_1,\ \vec{r}')\,G_{z'}(\vec{r}',\ 0)\,K_{z'}(0,\ z')\,dr'^3\Big|. \tag{4.39}$$

Разыскивая момент на оси z, положим $\vec{r}_1 = (0,\ 0,\ z_1)$ и $\vec{r}_2 = (0,\ 0,\ z_2)$ и будем для определенности считать, что $z_2 \geqslant z_1$. Вычисление интегралов в (4.39) проводится следующим образом. Сначала интегрирование ведется по переменным x', y' и x'', y'', а затем, задавая конкретное выражение корреляционной функции $K(z', z'')$, вычисляем интегралы по z', z''. При этом фундаментальное значение имеет результат вычисления следующего интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int G(\vec{r}_1,\ \vec{r}')\,G'_{z'}(\vec{r}',\ 0)\,dx'dy' = -\frac{1}{8\pi}\frac{\operatorname{sign} z'}{|z'| + |z_1 - z'|}. \tag{4.40}$$

Тогда двойной интеграл по всему пространству преобразуется следующим образом (интеграл из (4.39)):

$$I_* = \frac{1}{64\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} z' \operatorname{sign} z'' K_{z', z''}^{*}(z', z'')\, dz' dz''}{|z'| + |z_1 - z'|\,|\,|z''| + |z_2 - z''|\,|}. \qquad (4.41)$$

Остальные интегралы в (4.39) однократны, вычисление их проще.

Для получения момента H в явном виде следует задаться конкретной функцией $K(z', z'')$.

Пусть структура случайной функции $k(z)$ такова, что ее второй разноточечный момент можно представить функцией следующего вида:

$$K(z', z'') = \begin{cases} D(1 - |z' - z''|/\varepsilon), & |z' - z''| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |z' - z''| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \qquad (4.42)$$

Нетрудно убедиться, что вторая смешанная производная функции $K(z', z'')$ в этом случае запишется так

$$\frac{\partial^2 K(z', z'')}{\partial z' \partial z''} = \frac{D}{\varepsilon} [2\delta(z' - z'') - \delta(z' - z'' - \varepsilon) - \delta(z' - z'' + \varepsilon)]. \qquad (4.43)$$

Подставляя (4.42) и (4.43) в вычисляемые интегралы и проделав весьма громоздкие выкладки, корреляционный момент флуктуаций можно представить в виде

$$H_1(z_1, z_2) = \frac{l^2 D}{16\pi^2 k_0^4 z_1 z_2}\, \theta\left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}\right). \qquad (4.44)$$

В зависимости от величины параметров $\zeta_1 = z_1/\varepsilon$ и $\zeta_2 = z_2/\varepsilon$ функция $\theta(\zeta_1, \zeta_2)$ принимает различный вид, например, при $\zeta_1 \geqslant 1$, $\zeta_2 - \zeta_1 < 1$ имеем

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{4} + \frac{\zeta_1 (2\zeta_2 - \zeta_1)}{4(\zeta_2 - \zeta_1)} \ln \frac{2\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1} +$$
$$+ \frac{\zeta_1 (2 + 2\zeta_2 - \zeta_1)}{8(2 + \zeta_2 - \zeta_1)} \ln \frac{\zeta_1}{2 + 2\zeta_2 - \zeta_1} + \frac{\zeta_2 (2 + 2\zeta_1 - \zeta_2)}{8(2 - \zeta_2 - \zeta_1)} \ln \frac{\zeta_2}{2 + 2\zeta_1 - \zeta_2} -$$
$$- \frac{\zeta_2 (2 + \zeta_2)}{8(2 + \zeta_2 - \zeta_1)} \ln \frac{2 + \zeta_2}{\zeta_2} - \frac{\zeta_1 (2 + \zeta_1)}{8(2 - \zeta_2 + \zeta_1)} \ln \frac{2 + \zeta_1}{\zeta_1},$$

при $\zeta_1 < 1$, $\zeta_2 < 1$ соответственно

$$\theta = 1 - \frac{\zeta_2}{2} + \frac{\zeta_1}{4} \frac{(2\zeta_2 - \zeta_1)}{(\zeta_2 - \zeta_1)} \ln \frac{2\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1} - \frac{\zeta_2 (2 + \zeta_2 - 2\zeta_1)}{8(2 + \zeta_2 - \zeta_1)} \ln \frac{2 + \zeta_2 - 2\zeta_1}{2 + \zeta_2} -$$
$$- \frac{\zeta_1 (2 + 2\zeta_2 - \zeta_1)}{8(2 + \zeta_2 - \zeta_2)} \ln \frac{2 + 2\zeta_2 - \zeta_1}{2 - \zeta_1} - \frac{\zeta_1 (2 - 2\zeta_2 + \zeta_1)}{8(2 - \zeta_2 + \zeta_1)} \ln \frac{2 - 2\zeta_2 + \zeta_1}{2 + \zeta_1} -$$
$$- \frac{\zeta_2 (2 + 2\zeta_1 - \zeta_2)}{8(2 - \zeta_2 + \zeta_1)} \ln \frac{2 + 2\zeta_1 - \zeta_2}{2 - \zeta_2} - \frac{\zeta_1}{4} \ln \frac{4 - \zeta_1^2}{\zeta_1^2} - \frac{\zeta_2}{4} \ln \frac{4 - \zeta_2^2}{\zeta_2^2} \text{ и т. д.} \qquad (4.45)$$

Очевидно, что для получения формул дисперсии флуктуаций следует в выписанных соотношениях для θ положить $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$. После выкладок получим для $\zeta \ll 1$

$$< u_1^2(z) > = \frac{l^2 D}{16\pi^2 k_0^4 z^2}\left(1 - \frac{\zeta}{2}\ln\frac{4-\zeta^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta^2}{4}\ln\frac{2+\zeta}{2-\zeta}\right). \qquad (4.46)$$

При $\zeta \gg 1$ имеем

$$< u_1^2(z) > = \frac{l^2 D}{16\pi^2 k_0^4 z^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta(2+\zeta)}{4}\ln\frac{2+\zeta}{\zeta}\right]. \qquad (4.47)$$

Результаты вычисления безразмерной дисперсии

$$\theta = 16\pi^2 k_0^4 z^2 l^{-2} D^{-1} < u_1^2 >$$

представлены ниже.

ζ	0	0,1	0,2	0,5	0,75	0,85	1	
θ	1	0,7005	0,5385	0,2911	0,2103	0,1934	0,1760	
ζ	1	2	3	5	10	20	100	∞
θ	0,1760	0,1137	0,0844	0,0559	0,0303	0,0159	0,0023	0

Безразмерная дисперсия θ с ростом ζ монотонно убывает. При $z/\varepsilon \sim 10$ и более дисперсия несущественна, при этих значениях ζ функция $u(z)$ достаточно гладка, среда ведет себя как однородно-анизотропная, что и может служить критерием применимости формул (4.33) и (4.36).

Дисперсия производной поля

Исследование дисперсии производной поля можно проводить двумя способами. Во-первых, можно рассмотреть дисперсию разностного отношения, необходимого для теории градиент-зонда, а затем перейти к пределу. Во-вторых, вычислить непосредственную дисперсию $\partial u_1/\partial z$. Оставив первый путь для изучения неидеального градиент-зонда, обратимся ко второму. Дифференцируя (4.44) по z_1 и z_2 и перейдя к пределу при $z_1 = z_2 = z$, получим после преобразований

$$H_2(z, z) = < \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 > = \frac{l^2 D}{16\pi^2 k_0^4 z^4}\Lambda(\zeta), \qquad (4.48)$$

где при $\zeta \ll 1$ функция $\Lambda(\zeta)$, имеет вид

$$\Lambda(\zeta) = 1 - \frac{\zeta}{3} + \frac{\zeta^3(7\zeta^2 + 3\zeta - 18)}{16(4-\zeta^2)} + \frac{\zeta^4}{8}\ln\frac{2+\zeta}{2-\zeta}. \qquad (4.49)$$

При $\zeta \gg 1$ имеем другую формулу

$$\Lambda(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\zeta - \frac{\zeta(\zeta^3 + \zeta^2 + 2\zeta + 4)}{4(\zeta+2)} + \frac{\zeta^4}{8}\ln\frac{2+\zeta}{\zeta}. \qquad (4.50)$$

Результаты вычислений безразмерной дисперсии производной поля $\Lambda(\zeta)$ представлены ниже.

ζ	0	0,1	0,2	0,5	0,75	0,85	1	
Λ	1	0,9664	0,9312	0,8425	0,6906	0,6542	0,6373	
ζ	1	2	3	5	10	20	100	∞
Λ	0,6373	0,7196	0,7721	0,8345	0,9025	0,9433	0,9920	1

Зависимость $\Lambda(\zeta)$ обладает интересными особенностями. Во-первых, отношение неопределенностей Λ не стремится к нулю, как это имело место для Θ при $\zeta \to \infty$. Это означает, что хотя поле потенциала обладает исчезающе малыми флуктуациями, поле производной имеет конечные флуктуации при стремлении масштаба неоднородности к нулю. Существенно также, что при убывании ε (при $\zeta \gg 1$) величина Λ растет. Вторая особенность зависимости $\Lambda(\zeta)$ — наличие минимума, находящегося в точке $\zeta = 1$. Из этого следует, что отношение неопределенностей производной поля и среды не может быть меньше некоторого $\Lambda_{min} \approx 0{,}6$. Следует ожидать, что в случае неидеального градиент-зонда дисперсия разностного отношения параметров зонда и ε также должна иметь локальный минимум.

Заметим также, что поскольку при $\varepsilon \to 0$ производная поля имеет конечную дисперсию, вторая производная поля должна иметь неограниченную дисперсию. Из этого следует, что двойной градиент-зонд должен обладать большой разрешающей способностью. По-видимому, при определенных условиях каротаж, фиксирующий вторую разность, позволит получать информацию о тонких чертах структуры каротируемого разреза.

Корреляция поля и производной поля

Располагая формулами для дисперсии поля и его производной, нетрудно вычислить их взаимный корреляционный момент и коэффициент корреляции. В самом деле, дифференцируя формулы (4.46) и (4.47) по z, получим при $\zeta \ll 1$

$$H_3 = < u_1(z) \frac{\partial u_1(z)}{\partial z} > = -\frac{I^2 D}{16\pi^2 k_0^4 z^3}\left(1 - \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta}{4}\ln\frac{4-\zeta^2}{\zeta^2}\right). \quad (4.51)$$

При $\zeta \gg 1$ имеем

$$H_3 = -\frac{I^2 D}{32\pi^2 k_0^4 z^3}\left(1 - \frac{\zeta}{2}\ln\frac{2+\zeta}{\zeta}\right). \quad (4.52)$$

Вычисленные по формулам (4.51), (4.52), (4.46) и (4.47) коэффициенты корреляции

$$\Psi(\zeta) = < u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} > \Big/ \sqrt{< u_1^2 > < \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 >}$$

представлены ниже.

ζ	0	0,1	0,2	0,5	0,75	0,85	1	
$-\psi$	1	0,9728	0,9465	0,8310	0,7494	0,7131	0,6727	
ζ	1	2	3	5	10	20	100	∞
$-\psi$	0,6727	0,5364	0,4578	0,3678	0,2671	0,1915	0,1020	0

Корреляция поля и поля проводимости

Существенное значение для теории и практики каротажа имеет установление корреляционных связей между проводимостью поля и самим полем. Для вычисления корреляционного момента

$$H_4(z_1, z_2) = < k'(z_1)\, u_1(z_2) > \qquad (4.53)$$

используем формулы (4.37) и (4.40). Тогда после преобразований получим

$$H_4(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi k_0^2 |z_2|}\left[K(0, z_1) + \frac{|z_2|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign} z' K_{z'}(z', z_1)\, dz'}{|z'| + |z_2 - z'|}\right]. \qquad (4.54)$$

Если использовать корреляционную функцию (4.42), то вычисления по формуле (4.54) нетрудно довести до конца. В итоге для момента H_4 получается серия формул, приводить которые мы не будем из-за их громоздкости. Приведем лишь результаты расчетов H_4^* — коэффициента корреляции поля и проводимости для достаточно типичных точек z_2

$$H_4^* = \frac{H_4(z_1, z_2)}{\sqrt{D < u_1^2(z_2) >}}.$$

На рис. 13 изображен график зависимости $H_4^*(\zeta, 1/2)$ т. е. коэффициент корреляции проводимости в произвольной точке ζ и поля, измеренного в точке $\zeta = 0{,}5$. Отметим некоторые особенности кривой. Во-первых, при любых значениях ζ коэффициент корреляции H_4^* отрицателен. На кривой заметны два максимума, расположенные несколько левее точки $\zeta = 0$ и несколько правее точки $\zeta = 1/2$ и равные один другому. Кроме того, можно доказать, что при любой стационарной случайной функции $k'(z)$ выполняется равенство $H_4^*(0, \zeta) = H_4^*(\zeta, \zeta)$, т. е. корреляция поля, замеряемого в точке ζ, с проводимостью в источнике и с проводимостью в той же точке ζ идентична. На наш взгляд этот эффект, его естественно назвать эффектом взаимности, имеет принципиальное значение. Интересно, что модуль коэффициента корреляции в интервале (0, 1/2) имеет довольно слабо выраженный минимум в точке $\zeta = 1/4$. С удалением точки измерения поля от начала координат этот минумум становится заметнее. В этом легко убедиться, обратившись к рис. 14, где изображена зависимость $-H_4^*(\zeta, 3/2)$. Следует отметить, что в отличие от предыдущего рисунка максимумы $|H_4^*|$ сильнее смещены вправо и влево от точки измерения поля и источника тока, что, по-видимому, интересно с точки зрения интерпретации

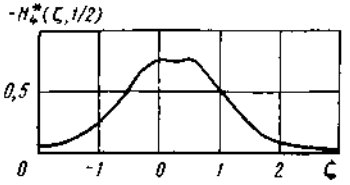


Рис. 13. Зависимость момента $H_4^*(\zeta, 1/2)$ от расстояния до источника поля ζ

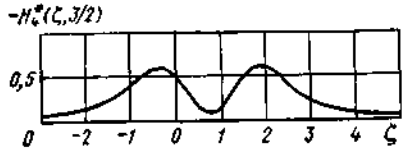
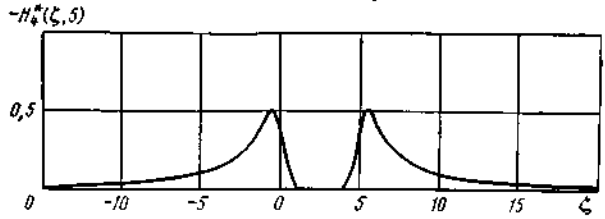


Рис. 14. Зависимость момента H_4^* (ζ, 3/2) от расстояния до источника поля ζ

Рис. 15. Зависимость момента H_4^* (ζ, 5) от расстояния до источника поля ζ



кривых зондирования. Локальный минимум, лежащий в точке $\zeta = 3/4$, выражен весьма четко, показывая, что в его окрестности проводимость практически не коррелирует с полем, измеренным в точке $\zeta = 3/2$.

Если точка измерения удалена от источника более чем на две единицы, коэффициент корреляции ведет себя несколько иначе (рис. 15). Как и ранее, имеет место эффект взаимности, т. е. выполнено равенство $H_4^*(\zeta, 0) = H_4^*(\zeta, \zeta)$, максимумы смещены влево и вправо, но вместо локального минимума между источником и точкой измерения появился интервал, в котором проводимость не коррелирует с полем в точке измерения. Обращение коэффициента корреляции в тождественный нуль связано, конечно, в определенной степени с видом выбранной корреляционной функции. Но дело не только в этом. Преобразуем формулу (4.37), используя при этом равенство (4.40). Нетрудно убедиться что $u_1(z)$ при $z > 0$ можно представить в виде

$$u_1(z) = -\frac{I}{4\pi k_0^2}\left[\int_{-\infty}^{0} \frac{k'(z')\,dz'}{(2z'-z)^2} + \int_{z}^{\infty} \frac{k'(z')\,dz'}{(2z'-z)^2}\right], \qquad (4.55)$$

т. е. в формулу не входят значения проводимости из интервала $(0, z)$. Следует отметить, что формула (4.55) имеет место для любых случайных функций $k'(z)$. Поэтому, если радиус корреляции проводимости равен единице, а $z > 2$, внутри интервала будут точки, слабо или совсем не коррелирующие с $u_1(z)$. Этот эффект представляется достаточно интересным и имеет существенное практическое значение. Заметим, что своеобразная симметрия формулы (4.55) объясняет, почему наблюдается эффект взаимности. Кстати, эффект взаимности — лишь частное проявление симметрии более общего характера. Если $k'(z)$ — стационарная случайная функция, то нетрудно из (4.55) видеть, что точка $\zeta/2$ является центром симметрии функций H_4^* (см. рис. 13, 14, 15).

Наблюдается еще один любопытный эффект. Можно показать, что дисперсия поля в точке $z_0 > 0$ одинакова, если флуктуирует

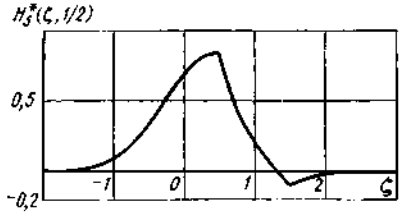


Рис. 16. Зависимость момента H_5 (ζ, 1/2) от расстояния до источника поля ζ

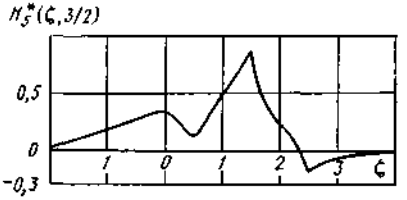


Рис. 17. Зависимость момента H_5 (ζ, 3/2) от расстояния до источника поля ζ

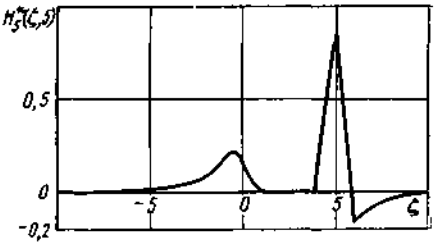


Рис. 18. Зависимость момента H_5^* (ζ, 5) от расстояния до источника поля ζ

полупространство $z \leqslant 0$ либо полупространство $z \geqslant 0$. Это утверждение можно усилить. К одинаковой дисперсии поля в точке z_0 приводят флуктуации проводимости в полупространстве $z \leqslant 0$ или $z \geqslant z_0$.

Рассмотрим корреляции проводимости и производной поля. Для получения соответствующих расчетных формул следует продифференцировать (4.54) по z_2, а затем пронормировать полученное соотношение, разделив его на $Д^{1/2} < (\partial u_1/\partial z)^2 >^{1/2}$. Не приводя довольно громоздких конечных формул, покажем лишь некоторые графики для коэффициента корреляции H_5^*. Обращает на себя внимание несимметричность кривой (рис. 16). Хотя при больших по модулю ζ величина H_5^* стремится к нулю, но в разных концах числовой оси она принимает противоположные знаки. Существенно, что максимума коэффициент корреляции достигает в точке $\zeta = 1/2$, т. е. производная поля в точке $\zeta = 1/2$ сильнее всего коррелирует с проводимостью в этой же самой точке. Этот вывод весьма существен для теории идеального градиент-зонда. В то же время не намного слабее производная поля в точке $\zeta = 1/2$ коррелирует с проводимостью во всем интервале (0, 1/2). Для точек, лежащих правее $\zeta = 1/2$, положение иное. Здесь корреляционный момент быстро убывает до нуля, а затем даже меняет знак.

Описанные тенденции изменения H_5^* проявляются значительно рельефнее, если точка измерения производной еще больше удалена от источника (рис. 17). Сравнивая рис. 16 и 17, нетрудно убедиться, что во втором случае пик H_5 в точке измерения стал круче, проявился довольно четкий максимум около источника. Все же следует считать, что производная поля в точке $\zeta = 3/2$ достаточно хорошо выделяет проводимость в окрестности той же точки.

На рис. 18 приведена кривая H_5^* (ζ, 5). Следует отметить появление плато в интервале (1,4), где коэффициент корреляции тождественно равен нулю. Пик в точке $\zeta = 5$ весьма четок, корре-

ляция производной поля и проводимости в точке измерения высокая. Если еще больше удалить точку измерения производной от источника, коэффициент корреляции будет еще выше. В этом случае идеальный градиент-зонд прекрасно выделяет проводимость в точке замера производной. По-видимому, именно в этом случае его использование приносит наибольшую информацию о свойствах среды.

РЕШЕНИЕ ТИПА ИСТОЧНИКА В ЗАДАЧЕ О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Выше были сформулированы основные задачи теории фильтрации в средах со случайными неоднородностями и указаны методы их решения. При этом основное внимание было уделено стационарным фильтрационным процессам. Далее решается одна из наиболее важных нестационарных задач и указывается связь полученного решения с широко применяемыми методами определения параметров пласта по кривым изменения давления в остановленных скважинах [26, 34]. Следует отметить, что интерпретация результатов таких определений проводится обычно при помощи решения соответствующей задачи для однородного пласта либо пласта, неоднородность которого носит регулярный характер, что определенным образом ограничивает возможности метода. В то же время очевидно, что решение указанных задач для нерегулярных сред и тем более нахождение их эффективных характеристик требуют использования статистических методов расчета.

1. Как известно, распределение давления в пласте с переменной проницаемостью $k(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) + F(\vec{r}, t). \tag{4.56}$$

Здесь p — давление; μ — вязкость жидкости; β — упругоемкость среды; $F(\vec{r}, t)$ — плотность источников как функция радиус-вектора $\vec{r}$ и времени t. Пусть β и μ — детерминированные константы, а $k(\vec{r})$ — случайная, статистически однородная функция координат $k = k_0 + k'(\vec{r})$, $k_0 = \langle k(\vec{r}) \rangle$ (угловые скобки означают усреднение по вероятности). Будем искать решение при нулевом начальном условии

$$p(\vec{r}, 0) = 0, \quad |\vec{r}| < \infty \tag{4.57}$$

методами теории возмущений, ограничиваясь первыми тремя приближениями. Положим

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}, t) + p_1(\vec{r}, t) + p_2(\vec{r}, t). \tag{4.58}$$

Здесь p_i — решения задачи

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = a^2 \nabla^2 p_i + \varphi_i, \quad p_i(\vec{r}, 0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \tag{4.59}$$

$$\varphi_0 = F/\beta, \quad \varphi_i = (\mu\beta)^{-1} \nabla (k' \nabla p_{i-1}), \quad a^2 = k_0/\mu\beta, \tag{4.60}$$

следовательно,

$$p_i(\vec{r},\ t) = \int_0^t \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\vec{r}',\ t')\, E(\vec{r}-\vec{r}',\ t-t')\, dt'dx'dy'. \qquad (4.61)$$

Обобщенная функция E является фундаментальным решением уравнения (4.59) и имеет вид $E \equiv 0$ при $t < t'$ и

$$E = \frac{1}{4\pi a^2 (t-t')} \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4a^2(t-t')}\right] \text{ при } t > t'. \qquad (4.62)$$

Рассмотрим случай, когда в момент времени $t = 0$ в начале координат начинает действовать точечный источник интенсивности Q. Тогда

$$F(\vec{r},\ t) = Q\delta(\vec{r}), \qquad (4.63)$$

где δ — дельта-функция Дирака на плоскости.

Подставив φ_0 в (4.61) и проинтегрировав, получим известное решение

$$p_0(\vec{r},\ t) = -\frac{Q\mu}{4\pi k_0} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4a^2 t}\right), \quad -\operatorname{Ei}(-z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \qquad (4.64)$$

Продифференцировав (4.61) и затем проинтегрировав, получим

$$\nabla p_0 = -\frac{Q\mu\vec{r}}{2\pi k_0 r^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2 t}\right), \quad \nabla^2 p_0 = -\frac{Q\mu}{k_0}[\delta(\vec{r}) - E(\vec{r},\ t)]. \qquad (4.65)$$

Подставив (4.65) в (4.60), запишем

$$\varphi_1(\vec{r},\ t) = \frac{Q}{k_0\beta}\left\{-k'(\vec{r})\,\delta(\vec{r}) + E(\vec{r},\ t)\left[k'(\vec{r}) - \frac{2a^2 t}{r^2}(\vec{r}\nabla k')\right]\right\}. \qquad (4.66)$$

Для вычисления $\varphi_2(\vec{r},\ t)$ аналогичные операции следует проделать с $p_1(\vec{r},\ t)$. Опуская преобразования, приведем выражение для математического ожидания

$$<\varphi_2> = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$\lambda_1 = (\mu\beta)^{-1} < k'(\vec{r})\nabla^2 p_1 >,\ \lambda_2 + \lambda_3 = (\mu\beta)^{-1} < \nabla k' \nabla p_1 > \qquad (4.67)$$

Введем корреляционную функцию проницаемости

$$K(\vec{r},\ \vec{r}') = < k'(\vec{r})\, k'(\vec{r}') >. \qquad (4.68)$$

Пусть корреляционная функция K имеет вид

$$K = D\exp(-\rho^2/\alpha^2),\ \rho = |\vec{r} - \vec{r}'|. \qquad (4.69)$$

Вычисление квадратур λ_i при произвольном α вызывает значительные трудности. В то же время, сравнительно легко проходят вычисления для асимптотики $\alpha \to \infty$ и $\alpha \to 0$, что соответствует

случаям крупно- и мелкомасштабных неоднородностей. Следует отметить, что масштаб неоднородности в решаемой задаче, как в этом легко убедиться при помощи анализа размерности и π-теоремы теории подобия, входит в искомые соотношения в комплексе со временем и радиусом

$$\pi_1^* = a^2/a^2t, \quad \pi_2^* = a/r. \tag{4.70}$$

Таким образом, критерием крупно- и мелкомасштабности будут соответственно условия:

$$1)\ \pi_1^* \gg 1, \quad \pi_2^* \gg 1; \quad 2)\ \pi_1^* \ll 1, \quad \pi_2^* \ll 1.$$

Однако роль параметров $\pi_{1,2}^*$ в процессе восстановления давления неодинакова. Как известно, для нулевого приближения (4.64) при достаточно больших t скорость изменения давления не зависит от r. Следует ожидать, что этот эффект должен наблюдаться и в случае неоднородного пласта, т. е. для больших моментов времени скорость изменения давления будет определяться параметром π_1^*. В этом смысле можно считать, что любая неоднородность при достаточно больших t является мелкомасштабной. Для малых моментов времени, если $\pi_2^* \gg 1$, критерий крупномасштабности всегда выполняется.

Отмеченное обстоятельство обусловливает практическую значимость рассмотрения асимптотики $\alpha \to \infty$ и тем более $\alpha \to 0$.

Итак, пусть $\alpha \to \infty$. Нетрудно убедиться, вычислив соответствующие интегралы, что

$$< \varphi_2 > = \frac{QD}{4\pi a^6 \mu^2 \beta^3}\left[4\pi a^2 \delta(\vec{r}) + \frac{1}{t}\left(\frac{r^2}{4a^2t} - 2\right)\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right)\right]. \tag{4.71}$$

Использовав (4.71) и положив $\zeta^2 = D/k_0^2$, найдем при $r^2/4a^2t \ll 1$

$$< p(r, t) > = -\frac{Q\mu(1+\zeta^2)}{4\pi k_0}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right) - \frac{Q\mu\zeta^2}{8\pi k_0}. \tag{4.72}$$

Очевидно, что при достаточно больших t можно в (4.72) пренебречь и последним членом.

Из полученных соотношений следует, что в случае крупномасштабных неоднородностей для подсчета среднего давления можно пользоваться известной формулой (4.64), но вместо k_0 в нее следует подставить эффективную характеристику

$$k^* = k_0(1+\zeta^2)^{-1}. \tag{4.73}$$

Рассмотрим случай мелкомасштабных неоднородностей, ограничиваясь изучением λ_t при больших t. Нетрудно видеть, что при таких условиях справедливы асимптотические выражения

$$\nabla p_1 = -\frac{1}{2\pi a^2}\int \varphi_1(\vec{r}', t' = \infty)\frac{\vec{\rho}}{\rho^2}dr'^2,$$

$$\nabla^2 p_1 = -\frac{1}{a^2}\varphi_1(r, t = \infty). \tag{4.74}$$

Подставляя (4.74) в (4.67), после усреднений по вероятности получим

$$\lambda_1 = \frac{QD}{a^4\mu^2\beta^3}\,\delta(\vec{r}). \tag{4.75}$$

Если корреляционная функция имеет вид (4.69), то при $\alpha \to 0$

$$\nabla_{r'} K(\vec{\rho}) = -2\pi\rho\,\delta(\vec{\rho}), \tag{4.76}$$

и, проведя преобразования, получим

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{QD}{2a^4\mu^2\beta^3}\,\delta(\vec{r}). \tag{4.77}$$

Складывая (4.75) и (4.76), найдем асимптотическую плотность источников, порожденных рассеянием поля $p_0(\vec{r}, t)$ мелкомасштабными флуктуациями

$$\langle \varphi_2 \rangle = \frac{QD}{2a^4\mu^2\beta^3}\,\delta(\vec{r}). \tag{4.78}$$

Подставив (4.78) в (4.61) и сложив $\langle p_2 \rangle$ с p_0, получим, что для достаточно больших t с точностью до конечной аддитивной постоянной

$$\langle p(\vec{r}, t) \rangle = -\frac{Q\mu(1+\zeta^2/2)}{4\pi k_0}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4a^2 t}\right). \tag{4.79}$$

Таким образом и в этом случае верна формула (4.64), где вместо k_0 фигурирует эффективная характеристика

$$k^* = k_0(1+\zeta^2/2)^{-1}. \tag{4.80}$$

Следует отметить, что последние результаты получены в предположении независимости флуктуаций проницаемости от координаты z. Если считать проницаемость изотропной функцией переменных x, y, z, то для крупномасштабных неоднородностей формула (4.73) остается в силе. Напротив, для мелкомасштабных неоднородностей, а это в данном случае означает, что кроме $\pi_1^* \ll 1$ выполняется условие $a^2/h^2 \ll 1$, где h — толщина пласта, эффективная характеристика k^* имеет вид

$$k^* = k_0(1+\zeta^2/3)^{-1}. \tag{4.81}$$

Полученные формулы можно использовать при интерпретации результатов исследования скважин по кривым изменения забойного давления. При этом следует иметь в виду, что средние, найденные в задаче, вычислены для ансамбля пластов, а проводя исследование реальной скважины, мы имеем дело с одним пластом и, следовательно, сопоставление необходимо проводить в условиях, когда эффективные характеристики статистической модели (ансамбля) имеют непосредственное отношение к аналогичным характеристикам реального объекта. Иными словами, должна существовать своеобразная эргодичность. В нашей задаче это имеет место

для достаточно больших времен и мелкомасштабных неоднородностей, т. е. тогда, когда флуктуации давления по ансамблю перестают играть существенную роль и распределение его становится неслучайным, но смещенным относительно $p_0(\vec{r}, t)$.

Из сказанного вытекает, что для реального процесса восстановления давления в неоднородном пласте характерны три периода. В первом периоде восстановление давления в скважине существенно зависит от распределения проницаемости в непосредственной ее окрестности. Интерпретируя начальные участки кривой восстановления давления, можно определить характеристики призабойной зоны скважины. Третий период характерен тем, что восстановление давления определяется статистическими характеристиками неоднородного пласта, отсутствием влияния призабойной зоны. В этом периоде характеристики статистической модели должны совпадать с эффективными параметрами реального процесса.

Второй период является переходным, и при определенных условиях интерпретации его может дать информацию о масштабе неоднородности α, что весьма ценно, но, очевидно, связано с большими трудностями.

Задачу о среднем поле в случайной среде с источником можно рассмотреть и в общем случае, не конкретизируя фильтрационного механизма, а предполагая лишь, что он описывается при соответствующих дополнительных условиях уравнением

$$Lp + f = 0, \tag{4.82}$$

где L — линейный оператор, зависящий от случайного поля проницаемости, например в первом разделе данной главы оператор L был эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка с переменными случайными коэффициентами, а в третьем — параболическим: f — плотность неслучайных источников.

Далее, используя операторный метод и следуя [37], получим уравнение для среднего поля $<p>$.

Усредняя (4.82), запишем

$$< L >< p > + < L'p' > + f = 0, \tag{4.83}$$

и, следовательно, для получения искомого уравнения нужно вычислить момент $< L'p' >$.

Пусть L^{-1} — оператор, обратный L. Тогда

$$p + L^{-1}f = 0, \tag{4.84}$$

и усреднив последнее уравнение, найдем

$$< p > + < L^{-1} > f = 0. \tag{4.85}$$

Вычитая из (4.84) равенство (4.85), определим флуктуацию

$$p' = |< L^{-1} > - L^{-1}|f, \tag{4.86}$$

или, использовав (4.85), запишем

$$p' = \{L^{-1} < L^{-1} >^{-1} - I\} < p >, \tag{4.87}$$

где I — единичный оператор.

Подставив (4.87) в (4.83), получим уравнение для среднего поля

$$L^* < p > + f = 0, \tag{4.88}$$

$$L^* = < L > + < L' L^{-1} > < L^{-1} >^{-1}. \tag{4.89}$$

Таким образом, среднее поле удовлетворяет уравнению, оператор которого, иногда его называют эффективным оператором, можно выразить через исходный оператор L. В принципе вычисление L^* можно реализовать при помощи разложения операторов в ряды, суммирования и усреднения. Например, представив оператор L в виде

$$L = < L > [I + < L >^{-1} L'],$$

можно формально представить

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -< L >^{-1} L')^n < L >^{-1}.$$

Не обсуждая вопросы сходимости таких рядов запишем первое нетривиальное приближение L^*, содержащее первые два члена операторного ряда

$$L^* = < L > - < L' < L >^{-1} L' >. \tag{4.90}$$

Именно в этом приближении и рассматривались фактически задачи, приведенные в первом — третьем разделах данной главы, показавшие, что в отличие от оператора $<L>$, который в изучаемых случаях был дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами, L^* таковым не является.

ГЛАВА 5

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОЛЯ В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Известно, что гидродинамическое поле фильтрации определяется проницаемостью, пористостью, вязкостью жидкости, гидродинамическим давлением и его градиентом, скоростью фильтрации и т. д., образующими, в свою очередь, скалярные или векторные поля. Поскольку предполагается статистическая структура поля проницаемости, остальные поля — элементы, связанные с проницаемостью и между собой зависимостями — законами фильтрации, будут также определяться статистическими закономерностями. Корреляционный анализ элементов поля помимо выяснения внутренней структуры фильтрационного процесса дает возможность решения задач фильтрации в средах со случайными неоднородностями. Так, в частности, изучаемые ниже корреляции необходимы для вычисления эффективной проницаемости изотропной и анизотропной сред, при исследовании дисперсии примеси в фильтрационном потоке, для вычисления коэффициента охвата при движении неньютоновской жидкости.

При статистическом анализе элементов поля будем придерживаться следующей схемы: элементы изучаются поочередно, причем рассматривая какой-либо элемент, будем тут же изучать его корреляции со всеми элементами, рассмотренными ранее (см. [36]. Конечным результатом такого изучения будет ковариационная матрица всей совокупности элементов поля.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХМЕРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В ИЗОТРОПНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Поле гидродинамического давления

Исследование поля давления в среде со случайными неоднородностями естественно связано с решением соответствующей задачи о движении жидкости в этой среде.

Рассмотрим движение однородной жидкости постоянной вязкости μ в неоднородной среде, проницаемость которой будем считать случайной функцией координат x, y, z. Полагая, что выполняется закон Дарси, жидкость несжимаема, в области фильтрации нет источников и стоков, запишем систему уравнений для давления p и скорости фильтрации $\vec{v}$

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \tag{5.1}$$

или, исключив $\vec{v}$, уравнение для p

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial p}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial p}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) = 0, \tag{5.2}$$

где $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$.

Будем считать, что на границе области фильтрации Γ задано неслучайное давление $p_\Gamma = p_*(x_1, x_2, x_3) \neq \text{const}$. Кроме того, положим, что случайная функция $k(r)$ образует однородное случайное поле, пространственный масштаб которого значительно меньше характерных размеров области фильтрации. В этом случае естественно ожидать, что всюду, за исключением области, примыкающей непосредственно к границе течения, гидродинамические элементы или их флуктуации образуют статистически однородные случайные поля и, следовательно, их средние значения не зависят от координат. Например, можно полагать, что почти всюду в области фильтрации постоянен градиент среднего давления или средняя скорость фильтрации. Если к тому же считать, что среднее значение элемента задано, то задача определения флуктуаций элемента значительно упрощается, тем более, что в случае малости масштаба неоднородности допустимо считать область фильтрации неограниченной.

Итак, будем искать решение уравнения (5.2) в неограниченной области $0 \leqslant |\vec{r}| < \infty$, предполагая, что искомая функция представлена в виде

$$p(\vec{r}) = p_0(\vec{r}) + p'(\vec{r}),\ p_0(\vec{r}) = \langle p(\vec{r}) \rangle \tag{5.3}$$

и выполняются условия

$$\nabla p_0 = \text{const},\ p'(\vec{r})_{|\vec{r}|\to\infty} = 0. \tag{5.4}$$

Для упрощения дальнейших вычислений будем полагать, что заданный вектор ∇p_0 и ось x_1 параллельны. Тогда $\langle \partial p/\partial x_1 \rangle = \partial p_0/\partial x_1 = \alpha = \text{const}$, $\partial p_0/\partial x_2 = \partial p_0/\partial x_3 = 0$. Заметим, что знак $\partial p_0/\partial x_1$ может быть любым, так как мы не связываем направления ∇p_0 и оси x_1.

Для отыскания p' и его статистических характеристик используется метод возмущений. Представив случайное поле $k(\vec{r})$ в виде

$$k(\vec{r}) = k_0(\vec{r}) + k'(\vec{r}),\ k_0(\vec{r}) = \langle k(\vec{r}) \rangle = \text{const}, \tag{5.5}$$

будем искать $p(\vec{r})$ в виде суммы

$$p(\vec{r}) = p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r}) + p_2(\vec{r}) + \ldots, \tag{5.6}$$

где функция $p_0(\vec{r})$ определена своими частными производными и, очевидно, удовлетворяет «невозмущенному» уравнению $k_0\nabla^2 p_0 = 0$, а на функции p_i при $i = 1, 2, \ldots$ наложено условие $\langle p_i \rangle = 0$.

Уравнения для p_n легко получить, подставив в (5.2) выражения (5.5) и (5.6) и приравняв нулю члены одинакового порядка относительно флуктуации $k'(\vec{r})$. При этом следует считать, что p_i имеет по k' порядок i. После преобразований получим уравнение

$$\nabla^2 p_n(\vec{r}) = k_0^{-1}[k'\nabla^2 p_{n-1} + \nabla k' \nabla p_{n-1}] = -\varphi_n(\vec{r}), \tag{5.7}$$

решение которого вследствие (5.4) должно удовлетворять условию

$$p_n(\vec{r}) = 0 \text{ при } |\vec{r}| \to \infty.$$

Как известно, решение (5.4) при этом условии можно записать следующим образом:

$$p_n(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}')\,\varphi_n(\vec{r}')\,dr'^3, \tag{5.8}$$

где функция Грина G имеет вид

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

а интегрирование в (5.8) проводится по объему всего трехмерного пространства. Символом dr'^3 обозначен элемент объема $dx_1'dx_2'dx_3'$.

Подставляя в (5.8) значение φ, получим для p_1

$$p_1(\vec{r}) = -\frac{1}{k_0}\alpha \int_{\tau} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial k'(\vec{r}')}{\partial x_1'} dr'^3. \tag{5.9}$$

Аналогично можно вычислить и остальные p_n. Считая возмущения k' достаточно малыми по сравнению с k_0, мы в дальнейшем ограничимся исследованием $p_1(\vec{r})$.

Получив соотношение (5.9) для флуктуации давления, определим корреляции поля p в различных точках пространства. Обозначив символом

$$H_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = < p_1(\vec{r}_1)\, p_1(\vec{r}_2) > \tag{5.10}$$

корреляционный момент давления в точках $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, перемножив $p_1(\vec{r}_1)$ и $p_1(\vec{r}_2)$ и усреднив, можно написать

$$H_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = k_0^{-2}\alpha^2 \int\int G(\vec{r}_1, \vec{r}')\, G(\vec{r}_2, \vec{r}'')\, K''_{x_1' x_1''}(\vec{r}', \vec{r}'')\, dr'^3 dr''^3. \tag{5.11}$$

Вычисление H_1 при произвольном расположении точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ связано со значительными трудностями. Проще обстоит дело при совпадении точек, т. е. при вычислении дисперсии поля давления. При $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$ имеем

$$H_1(\vec{r}, \vec{r}) = k_0^{-2}\alpha^2 \int\int G(\vec{r}, \vec{r}')\, G(\vec{r}, \vec{r}'')\, K''_{x_1' x_1''}(\vec{r}', \vec{r}'')\, dr'^3 dr''^3. \tag{5.12}$$

Проведем в (5.12) следующие преобразования. Перенесем начало координат систем $\vec{r}'$ и $\vec{r}'$ в точку $\vec{r}$ и дважды проинтегрируем (5.12) по частям. Тогда, учитывая, что функция G в бесконечности вместе со своими частными производными обращается в нуль, а поле $k'(\vec{r})$ однородно, запишем

$$H_1(\vec{r}, \vec{r}) = k_0^{-2}\alpha^2 \int\int G'_{x_1'}(\vec{r}')\, G'_{x_1''}(\vec{r}'')\, K(\vec{r}', \vec{r}'')\, dr'^3 dr''^3.$$

Если считать случайное поле проницаемости также изотропным, то корреляционная функция K зависит лишь от $|\vec{r}' - \vec{r}''|$. Тогда, введя новые переменные $\vec{\rho}_1 = \vec{r}'$, $\vec{\rho}_2 = \vec{r}' - \vec{r}''$, $\rho_i = |\vec{\rho}_i|$, получим

$$H_1(\vec{r}, \vec{r}) = k_0^{-2}\alpha^2 \int B^{11}(\rho_2)\, K(\rho_2)\, d\rho_2^3, \tag{5.13}$$

где

$$B^{ij}(\rho_2) = \int G'_{\xi_i'}(\vec{\rho}_1)\, G'_{\xi_j'}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2)\, d\rho_1^3. \tag{5.14}$$

Результат вычислений интеграла (5.14) приведен в работе [19] и имеет вид

$$B^{ij}(\rho_2) = \frac{1}{8\pi\rho_2}(\delta_{ij} - \psi_{ij}),\ \psi_{ij} = \frac{\zeta_i\zeta_j}{\rho_2^2},\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (5.15)$$

Для того чтобы получить этот результат, целесообразно свертку производных функций Грина трансформировать при помощи преобразования Фурье.

Пусть $\vec{k}$ — волновой вектор, а $\overline{B}$, $\overline{G}$ — преобразования Фурье соответственно свертки B и функции Грина G. Тогда из (5.14) получим

$$\overline{B}^{ij}(\vec{k}) = \overline{G}'_{\zeta_i}(\vec{k})\,\overline{G}_{\zeta_j}(\vec{k}),$$

а так как

$$\overline{G}(k) = 1/k^2,\ \overline{G}'_{\zeta_i}(\vec{k}) = k_i/k^2,$$

то имеем

$$\overline{B}^{ij}(\vec{k}) = k_i k_j/k^4. \quad (5.16)$$

Теперь для получения (5.15) остается применить к $\overline{B}^{ij}$ обратное преобразование Фурье и вычислить интеграл

$$B^{ij}(\rho_2) = \frac{1}{8\pi^3}\int \frac{k_i k_j}{k^4} e^{i\vec{k}\vec{\rho}_2} dk^3.$$

Возвращаясь к вычислению корреляции H_1, подставим (5.15) в (5.13). Проведя теперь интегрирование по углам всего пространства $\vec{\rho}_2 = \vec{\rho}$, получим после преобразований

$$H_1(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{1}{3k_0^2}\alpha^2 \int_0^\infty K(\rho)\,\rho d\rho.$$

Следует заметить, что хотя в рассматриваемом случае поле давления не является однородным (среднее давление $p_0(\vec{r})$ зависит от координат), его флуктуация $p_1(\vec{r})$ однородна. Задавшись конкретной функцией $K(\rho)$, нетрудно довести вычисления до конца. Пусть, например,

$$K(\rho) = De^{-\rho^2/a^2},\ \text{тогда}\ H_1 = D\alpha^2 a^2/6k_0^2;$$

$$K(\rho) = De^{-\rho/a},\ H_1 = D\alpha^2 a^2/3k_0^2;$$

$$K(\rho) = Dh(\rho),\ h(\rho) = \begin{cases} 1 & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases},\ H_1 = \frac{D}{3k_0^2}\alpha^2\frac{a^2}{2}.$$

Итак, во всех случаях дисперсия давления пропорциональна квадрату величины, которую естественно назвать масштабом корре-

ляции проницаемости. В общем случае, введя в рассмотрение масштаб L при помощи формулы

$$L^2 = 2D^{-1} \int_0^\infty K(\rho)\, \rho d\rho,$$

запишем H_1 в виде

$$H_1 = D\alpha^2 L^2/6k_0^2.$$

Если ввести перепад среднего давления на длине, равной масштабу L и обозначить его через p_*, то

$$H_1 = \zeta^2 p_*^2/6.$$

Корреляция давления и проницаемости

Для вычисления корреляционного момента $< k'(\vec{r}_1)\, p_1(\vec{r}_2) >$ умножим (5.9) на $k'(\vec{r})$ и усредним

$$< k' p_1 > = k_0^{-1} \alpha \int G(\vec{r}_2, \vec{r}')\, K'_{x_1}(\vec{r}_1, \vec{r}')\, dr'^3.$$

Ограничиваясь вычислением одноточечного момента, положим $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$ и перенесем начало координат системы в точку $\vec{r}$. Тогда

$$< k' p_1 > = k_0^{-1} \alpha \int G(\vec{r}')\, K'_{x_1}(\vec{r}')\, dr'^3.$$

Поскольку G — четная функция, а K'_{x_1} — нечетная функция, последний интеграл равен нулю. Итак, при $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ имеем $< k' p' > = 0$, т. е. давление и проницаемость не коррелируют в одной и той же точке пространства.

Поле градиента давления

Исследуем вторые моменты векторного поля градиента давления. Нетрудно показать, что эти моменты образуют некоторый тензор второго ранга, компоненты которого имеют вид

$$H_2^{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = < \frac{\partial p_1(\vec{r}_1)}{\partial x_i^1} \frac{\partial p_1(\vec{r}_2)}{\partial x_j^2} > = \frac{\partial^2 H_1(\vec{r}_1 \vec{r}_2)}{\partial x_i^1 \partial x_j^2}, \qquad (5.17)$$

где $i, j = 1, 2, 3$; верхний индекс у x_n^k обозначает точку пространства, а нижний — компоненту градиента. Используя для H_1 выражение (5.11), получим после преобразований

$$H_2^{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = k_0^{-2} \alpha^2 \int\int G'_{x_i^1}(\vec{r}_1, \vec{r}')\, G'_{x_j^2}(\vec{r}_2, \vec{r}'') \times$$

$$\times K''_{x_1' x_1''}(\vec{r}', \vec{r}'')\, dr'^3 dr''^3. \qquad (5.18)$$

Ограничимся вычислением H_2^{ij} в том случае, когда $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$. Тогда

$$H_2^{ij} = -k_0^{-2}\alpha^2 \int B^{ij}(\rho_2)\, K''_{\zeta_1^2\zeta_1^2}(\rho_2)\, d\rho_2^3. \tag{5.19}$$

Используя (5.15), после перехода к сферическим координатам и интегрирования по ρ_2 и углам, получим

$$H_2^{ij} = \frac{D}{15k_0^2}\alpha^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Дисперсия первой компоненты градиента в 3 раза превышает дисперсии других компонент, что объясняется тем, что среднее движение направлено вдоль первой оси. Для суммы дисперсий, т. е. главного инварианта тензора, получим

$$H_2 = \sum_{i=1}^{3} H_2^{ii} = D\alpha^2/3k_0^2.$$

Корреляция проницаемости и вектора градиента давления

Определим соответствующий корреляционный момент равенством

$$H_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = < k'(\vec{r}_1) \frac{\partial p_1(\vec{r}_2)}{\partial x_i^2} >, \; i = 1, 2, 3.$$

Очевидно, H_3^i является вектором, компоненты которого имеют вид

$$H_3^i(\vec{r}, \vec{r}_2) = k_0^{-1}\alpha \int G'_{x_1^i}(\vec{r}_1, \vec{r}')\, K'_{x_1'}(\vec{r}_2, \vec{r}')\, dr'^3. \tag{5.21}$$

Рассмотрим одноточечный момент $H_3^i(\vec{r}, \vec{r})$. Перенося начало координат системы $\vec{r}'$ в точку $\vec{r}$, заменяя $G'_{x_1^i}$ на $-G'_{x_i'}$ и интегрируя по частям, получим

$$H_3^i(\vec{r}, \vec{r}) = k_0^{-1}\alpha \int G(\vec{r})\, K''_{x_i x_1}(\vec{r})\, dr^3. \tag{5.22}$$

Вводя сферические координаты, выполнив интегрирование по всему пространству, после преобразований и при условии $K(r) \to 0$ при $r \to \infty$ получим

$$H_3^1 = -D\alpha/3k_0, \; H_3^2 = H_3^3 = 0. \tag{5.23}$$

Используя H_2^{ij}, легко вычислить коэффициенты корреляции $\eta_3^i = H_3^i/\sqrt{H_2^{ii}D}$. Подставляя соответствующие значения, найдем

$$\eta_3^1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{sign}\alpha = -0{,}745\operatorname{sign}\alpha; \; \eta_3^2 = \eta_3^3 = 0.$$

Корреляция давления и градиента давления

Если ограничиться рассмотрением одноточечного момента, то некоррелированность этих полей следует из известного факта [7] некоррелированности однородного случайного поля и его производных. Итак, при $i=1, 2, 3$ имеем

$$<p_1(\vec{r})\,\partial p_1(\vec{r})/\partial x_i> = 0.$$

Поле скорости фильтрации

Поскольку флуктуации компонентов скорости фильтрации

$$v_i' = -\left(k'\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + k_0\frac{\partial p_1}{\partial x_i}\right)\mu^{-1}$$

образуют векторное поле, их корреляции являются тензором второго ранга. Обозначив его $H_4^{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = <v_i'(\vec{r}_1)\,v_j'(\vec{r}_2)>$, получим

$$H_4^{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \left[\frac{\partial p_0}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_j}K(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + k_0\frac{\partial p_0}{\partial x_i}H_3^j + k_0\frac{\partial p_0}{\partial x_j}H_3^i + k_0^2H_2^{ij}\right]\frac{1}{\mu^2}.$$

Ограничимся вычислением одноточечных корреляций. Тогда при $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$ можно использовать вычисленные ранее моменты. После преобразований найдем

$$H_4^{ij} = \frac{D\alpha^2}{15\mu^2}\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим корреляцию компонент вектора скорости с полями, рассмотренными ранее.

Корреляция скорости с проницаемостью:

$$<k'\vec{v}_i> = -\frac{D}{\mu}\frac{\partial p_0}{\partial x_i} - \frac{k_0}{\mu}<k'\frac{\partial p_1}{\partial x_i}>.$$

При $i=1 <k'v_1'> = -\frac{2D}{3\mu}\alpha$. Соответствующий коэффициент корреляции $\rho = -\sqrt{5/6}\operatorname{sign}\alpha = -0{,}915\operatorname{sign}\alpha$ и может считаться достаточно высоким. При $i=2, 3$ имеем $<k'v_2'> = <k'v_3'> = 0$.

Корреляция скорости и давления:

так как p_1 не коррелирует с проницаемостью и $\partial p_1/\partial x_i$, то $<p_1v_i'> = 0$ при $i=1, 2, 3$.

Корреляция скорости и градиента давления:

компоненты соответствующего тензора имеют вид

$$<v_i'\frac{\partial p_1}{\partial x_j}> = \left[-\frac{\partial p_0}{\partial x_i}H_3^j - k_0H_2^{ij}\right]\mu^{-1},$$

или после вычислений

$$<v_i'\frac{\partial p}{\partial x_j}> = \frac{1}{15\mu}\frac{D}{k_0}\alpha^2\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов корреляции запишется следующим образом:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поле диссипируемой энергии

При движении вязкой жидкости в пористой среде расходуется энергия на преодоление сопротивления, происходит ее рассеяние, или, как принято говорить, диссипация. Обозначив через E количество энергии, диссипируемой в единицу времени в единичном объеме, можно записать

$$E = -\vec{v}\nabla p. \tag{5.24}$$

Если считать среду неоднородной по проницаемости, то для флуктуации энергии E_1 имеем с точностью до малых второго порядка

$$E_1 = k'\alpha^2 \frac{1}{\mu} + 2k_0\alpha \frac{1}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}.$$

Отсюда для дисперсии энергии получим выражение

$$< E_1^2 > = [D\alpha^4 + 4k_0\alpha^3 H_3^1 + 4k_0^2\alpha^2 H_2^{11}]\mu^{-2}.$$

Или, подставив вычисленные ранее моменты, найдем

$$< E_1^2 > = 7D\alpha^4/15\mu^2.$$

Рассмотрим корреляцию рассеиваемой энергии, далее без оговорок называемой энергией, с изученными ранее полями.

Корреляция энергии и проницаемости

$$< k'E_1 > = \frac{D}{\mu}\alpha^2 + 2\frac{k_0}{\mu}\alpha H_3^1 = \frac{1}{3}\frac{D}{\mu}\alpha^2.$$

Соответствующий коэффициент корреляции $\rho = \sqrt{5}/\sqrt{21} = 0{,}488$ положителен, но относительно невелик.

Корреляция энергии и давления

$$< p_1 E_1 > = 0.$$

Корреляция энергии и компонент градиента давления

$$< \frac{\partial p_1}{\partial x_i} E_1 > = \alpha^2 \frac{1}{\mu} H_3^i + \frac{2k_0}{\mu}\alpha H_2^{1i}.$$

Пусть $i = 1$. Тогда

$$< \frac{\partial p_1}{\partial x_1} E_1 > = \frac{1}{15\mu}\frac{D}{k_0}\alpha^3; \quad \rho = \frac{1}{21}\operatorname{sign}\alpha.$$

При $i = 2, 3$ имеем $< E_1 \partial p_1/\partial x_i > = 0$. Таким образом, корреляция энергии и градиента давления довольно слабая.

ТАБЛИЦА 8

Элемент поля	k'	$\partial p_1/\partial x_1$	$\partial p_1/\partial x_2$	$\partial p_1/\partial x_3$	v_1'	v_2'	v_3'	E_1
k'	D	$-\frac{1}{3}\alpha k_0\zeta^2$	0	0	$-\frac{2}{3}\alpha k_0^2\zeta^2$	0	0	$\frac{1}{3}\alpha^2 k_0^2\zeta^2$
$\partial p_1/\partial x_1$		$\frac{1}{5}\alpha^2\zeta^2$	0	0	$\frac{2}{15}\alpha^2 k_0\zeta^2$	0	0	$\frac{1}{15}\alpha^3 k_0\zeta^2$
$\partial p_1/\partial x_2$			$\frac{1}{15}\alpha^2\zeta^2$	0	0	$-\frac{1}{15}\alpha^2 k_0\zeta^2$	0	0
$\partial p_1/\partial x_3$				$\frac{1}{15}\alpha^2\zeta^2$	0	0	$-\frac{1}{15}\alpha^2 k_0\zeta^2$	0
v_1'					$\frac{8}{15}\alpha^2 k_0^2\zeta^2$	0	0	$-\frac{2}{5}\alpha^3 k_0^2\zeta^2$
v_2'						$\frac{1}{15}\alpha^2 k_0^2\zeta^2$	0	0
v_3'							$\frac{1}{15}\alpha^2 k_0^2\zeta^2$	0
E_1								$\frac{7}{15}\alpha^4 k_0^2\zeta^2$

ТАБЛИЦА 9

Элемент поля	k'	$\partial p_1/\partial x_1$	$\partial p_1/\partial x_2$	$\partial p_1/\partial x_3$	v_1'	v_2'	v_3'	E_1
k'	1	$-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sign}\alpha$	0	0	$-\sqrt{\frac{5}{6}}\times$ $\times\operatorname{sign}\alpha$	0	0	$\sqrt{5/21}$
$\partial p_1/\partial x_1$		1	0	0	$1/\sqrt{6}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{sign}\alpha$
$\partial p_1/\partial x_2$			1	0	0	-1	0	0
$\partial p_1/\partial x_3$				1	0	0	-1	0
v_1'					1	0	0	$-\frac{3}{\sqrt{14}}\times$ $\times\operatorname{sign}\alpha$
v_2'						1	0	0
v_3'							1	0
E_1								1

Корреляция энергии и компонент скорости фильтрации.

$$< E_1 v_i > = -\frac{D}{\mu^2}\frac{\partial p_0}{\partial x_i}\alpha^2 - \frac{k_0}{\mu_0^2}H_3^i - \frac{2k_0^2}{\mu^2}\alpha H_2^{1i}.$$

Пусть $i = 1$. Тогда

$$< E_1 v_1 > = \frac{2}{5\mu^2} D\alpha^3, \quad \rho = -\frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{sign}\alpha = -0{,}802 \operatorname{sign}\alpha.$$

При $i = 2, 3$ получим $< E_1 v_i' > = 0$.

Ковариационная матрица всех элементов поля и матрица коэффициентов взаимной корреляции представлены в табл. 8, 9.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХМЕРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

Использование корреляционной теории позволило вычислить одноточечные корреляции различных элементов гидродинамического поля. Далее будет показано, как использование спектральной теории позволяет несколько иначе решать те же задачи, а в некоторых случаях исследовать поведение разноточечных моментов.

Итак, рассмотрим основную систему уравнений для флуктуаций фильтрационного поля в трехмерном пространстве.

Как известно, спектральная теория основана на возможности представления однородного случайного поля в виде интеграла Фурье—Стильтьеса. Предполагая, что поля $k'(\vec{r})$, $v_m'(\vec{r})$, $p_1(\vec{r})$ однородны, представим их в виде

$$k'(\vec{r}) = \int e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}}\, dz_k(\vec{\varkappa}), \quad v_m'(\vec{r}) = \int e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}}\, dz_m(\vec{\varkappa}),$$
$$p_1(\vec{r}) = \int e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}}\, dz_p(\vec{\varkappa}), \quad \vec{\varkappa} = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3). \tag{5.25}$$

Случайное поле z_k по определению обладает следующим важным свойством:

$$< dz_k^*(\vec{\varkappa}_1)\, dz_k(\vec{\varkappa}_2) > = \delta(\vec{\varkappa}_1 - \vec{\varkappa}_2)\Phi(\vec{\varkappa}_1)\, d\varkappa_1^3 d\varkappa_2^3.$$

Здесь звездочка над z_k означает комплексную сопряженность, а $\Phi(\vec{\varkappa})$ является спектральной плотностью поля $k'(\vec{r})$. Как известно, она связана с корреляционной функцией $K(\vec{r})$ следующими формулами:

$$K(\vec{r}) = \int e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}}\Phi(\vec{\varkappa})\, d\varkappa^3, \quad \Phi(\vec{\varkappa}) = (2\pi)^{-3}\int e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r}} K(\vec{r})\, dr^3,$$

т. е. Φ и K взаимно обратны относительно преобразования Фурье.

Случайные поля z_m и z_p определяются при помощи уравнений (5.1). Подставив (5.25) в (5.1) и обозначив $\partial p_0/\partial x_m = a_m$, получим систему

$$dz_m = -\mu^{-1}(a_m dz_k + ik_0 x_m dz_p), \quad \sum_{m=1}^{3} x_m dz_m = 0, \tag{5.26}$$

решение которой можно записать так

$$dz_p = -\frac{1}{ik_0|\vec{x}|^2}\sum_{m=1}^{3} x_m a_m dz_k;\ dz_m = -\frac{1}{\mu}\left(a_m - \frac{x_m}{|\vec{x}|^2}\sum_{m=1}^{3} x_m a_m\right)dz_k. \tag{5.27}$$

Обозначив спектральные плотности

$$\varphi_p(\vec{x}) = \frac{-1}{ik_0|\vec{x}|^2}\sum_{m=1}^{3} x_m a_m,$$

$$\varphi_m(\vec{x}) = -\frac{1}{\mu}\left(a_m - \frac{x_m}{|\vec{x}|^2}\sum_{m=1}^{3} x_m a_m\right),$$

перепишем равенства (5.27) в виде

$$dz_p = \varphi_p(\vec{x})dz_k,\ dz_m = \varphi_m(\vec{x})\,dz_k,\ m = 1, 2, 3. \tag{5.28}$$

Располагая спектральными плотностями, можно вычислить корреляции различных элементов поля. В качестве примера рассмотрим корреляцию компонент вектора скорости фильтрации, которая согласно (5.25) и (5.28) имеет вид

$$H_4^{ij}(\vec{\zeta}) = \int e^{i\vec{x}\vec{\zeta}}\,\varphi_i(\vec{x})\,\varphi_j(\vec{x})\,\Phi(\vec{x})\,dx^3. \tag{5.29}$$

Пусть, как и прежде, среднее течение ориентировано вдоль первой оси. Тогда имеем $a_1 = a$, $a_2 = a_3 = 0$ и

$$H_4^{ij}(\vec{\zeta}) = \frac{1}{\mu^2}\int e^{i\vec{x}\vec{\zeta}}\left(a_i - \frac{x_i x_1 a}{|\vec{x}|^2}\right)\left(a_j - \frac{x_j x_1 a}{|\vec{x}|^2}\right)\Phi(\vec{x})\,dx^3. \tag{5.30}$$

Выпишем компоненты корреляционного тензора

$$H_4^{11}(\vec{\zeta}) = \frac{a^2}{\mu^2}\int e^{i\vec{x}\vec{\zeta}}\left[1 - \frac{x_1^2}{|\vec{x}|^2}\right]^2\Phi(\vec{x})\,dx^3,$$

$$H_4^{22}(\vec{\zeta}) = \frac{a^2}{\mu^2}\int e^{i\vec{x}\vec{\zeta}}\,\frac{x_1^2 x_2^2}{|\vec{x}|^4}\,\Phi(\vec{x})\,dx^3,$$

$$H_4^{33}(\vec{\zeta}) = \frac{a^2}{\mu^2}\int e^{i\vec{x}\vec{\zeta}}\,\frac{x_1^2 x_3^2}{|\vec{x}|^4}\,\Phi(\vec{x})\,dx^3 \text{ и т. д.}$$

Наиболее просто вычисляются одноточечные моменты. Положив $\zeta = 0$, найдем, например,

$$H_4^{11}(0) = \frac{a^2}{\mu^2}\int\left[1 - \frac{x_1^2}{|\vec{x}|^2}\right]\Phi(\vec{x})\,dx^3.$$

Известно, что если поле k' однородно и изотропно, то его спектральная плотность зависит лишь от модуля волнового вектора, т. е. от $\varkappa = \sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2}$. Вводя сферические координаты $\varkappa_1 = \varkappa \cos\Psi \sin\theta$, $\varkappa_2 = \varkappa \sin\Psi \sin\theta$, $\varkappa_3 = \varkappa \cos\theta$ и проинтегрировав по всему волновому пространству $0 \leqslant \varkappa \leqslant \infty$, $0 \leqslant \Psi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, после вычислений получим $H_4^{11}(0) = 8D\alpha^2/15\mu^2$, т. е. результат, точно совпадающий с корреляционным моментом, найденным в первом разделе данной главы. Аналогично вычисляются и другие корреляционные моменты.

Как уже говорилось, вычисление корреляции при произвольном $\vec{\zeta}$ затруднительно. Однако при достаточно малых $|\vec{\zeta}|$ можно получить искомые зависимости, разлагая $\exp[i\vec{\varkappa}\vec{\zeta}]$ в ряд и вычисляя коэффициенты при первых членах ряда по степеням ζ_i. Рассмотрим, например, корреляционный момент $H_4^{11}(\vec{\zeta})$. Ограничиваясь в разложении членами второго порядка, можно написать

$$H_4^{11}(\vec{\zeta}) = \frac{\alpha^2}{\mu^2} \int \left[1 - \frac{\varkappa_1^2\zeta_1^2}{2} - \frac{\varkappa_2^2\zeta_2^2}{2} - \frac{\varkappa_3^2\zeta_3^2}{2}\right]\left[1 - \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa^2}\right]^2 \Phi(\varkappa)\, d\varkappa^3. \tag{5.31}$$

В выражении (5.31) отсутствуют члены, линейные относительно ζ_i и пропорциональные $\zeta_i\zeta_j$ при $i \neq j$, что связано с обращением в нуль соответствующих коэффициентов из-за нечетности подынтегральной функции.

Пусть $K(\vec{\zeta}) = D\exp(-|\vec{\zeta}|^2/a^2)$. Тогда для спектральной плотности поля проницаемости имеем

$$\Phi(\varkappa) = \frac{Da^3}{8\pi\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\varkappa^2 a^2}{4}\right).$$

После вычислений (5.31) получим

$$H_4^{11}(\vec{\zeta}) = D\frac{\alpha^2}{\mu^2}\frac{8}{15}\left\{1 - \frac{3}{7}\left[\frac{\zeta_1^2}{a^2} + 3\frac{\zeta_2^2}{a^2} + 3\frac{\zeta_3^2}{a^2}\right]\right\}. \tag{5.32}$$

Аналогично подсчитав другие H_4^{ij}, запишем

$$H_4^{22}(\vec{\zeta}) = D\frac{\alpha^2}{15\mu^2}\left\{1 - \frac{3}{7}\left[\frac{3\zeta_1^2}{a^2} + 3\frac{\zeta_2^2}{a^2} + \frac{\zeta_3^2}{a^2}\right]\right\},$$

$$H_4^{33}(\vec{\zeta}) = D\frac{\alpha^2}{15\mu^2}\left\{1 - \frac{3}{7}\left[3\frac{\zeta_1^2}{a^2} + \frac{\zeta_2^2}{a^2} + 3\frac{\zeta_3^2}{a^2}\right]\right\},$$

$$H_4^{12}(\vec{\zeta}) = \frac{8D\zeta_1\zeta_2\alpha^2}{35a^2\mu^2},\quad H_4^{13}(\vec{\zeta}) = \frac{8D\zeta_1\zeta_3}{35a^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\mu^2},$$

$$H_4^{23}(\vec{\zeta}) = -\frac{2D\zeta_3\zeta_2}{35a^2} \cdot \frac{a^2}{\mu^2}.$$

Нетрудно заметить, что корреляции H_4^{ij} неизотропны, хотя поле $K'(r)$ считается изотропным. Интересно, что корреляция H_4^{11} медленнее всего убывает вдоль оси ζ_1, т. е. «своей» оси, в то время, как H_4^{22} медленнее убывает вдоль ζ_3, а H_4^{33} — вдоль ζ_2, т. е. «чужих» осей.

Пусть $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta$. Тогда из последних формул следует

$$H_4^{11} = \frac{Da^2}{\mu^2} \cdot \frac{8}{15} f(\zeta); \quad H_4^{22} = H_4^{33} = \frac{Da^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{15} f(\zeta); \quad f(\zeta) = 1 - 3\frac{\zeta^2}{a^2},$$

и если обратить внимание на то, что $f(\zeta)$ с точностью до малых четвертого порядка совпадает с разложением нормированной корреляционной функции проницаемости в ряд по степеням ζ_i, то становится правдоподобной гипотеза о примерно одинаковом изменении безразмерных корреляций компонент скорости и корреляционной функции проницаемости при $\zeta_i = \zeta$. Для уточнения гипотезы вычислены более высокие члены разложения H_4 в ряд. Так, с учетом членов четвертого порядка получено

$$H_4^{11}(\vec{\zeta}) = \frac{Da^2}{\mu^2} \cdot \frac{8}{15}\left\{1 - \frac{3}{7a^2}(\zeta_1^2 + 3\zeta_2^2 + 3\zeta_3^2) + \frac{8}{126a^4} \times \right.$$
$$\left. \times (\zeta_1^4 + 6\zeta_2^4 + 6\zeta_3^4 + 6\zeta_1^2\zeta_2^2 + 6\zeta_1^2\zeta_3^2 + 12\zeta_2^2\zeta_3^2)\right\}. \qquad (5.33)$$

Если снова положить $\zeta_i = \zeta$, то поправки, отличающие (5.33) от (5.32), уже не в точности совпадают с членами четвертого порядка в разложении $K(\vec{\zeta})$ в ряд. Однако различие небольшое — коэффициенты при ζ^4 в соответствующих разложениях H_4^{11} пропорциональны соответственно 4,5 и 4,4, т. е. отличаются примерно на 2 %. Таким образом, при $\zeta_i = \zeta$ корреляции $H_4(\vec{\zeta})$ и $K(\zeta)$ довольно близки.

Вычисленные корреляции удовлетворяют некоторым условиям симметрии. Так, например, в соответствии с (5.32) и (5.33) момент $H_4^{11}(\vec{\zeta})$ не меняется при вращении системы координат около оси ζ_1, направленной вдоль среднего течения. Этому же условию, как легко проверить, удовлетворяет корреляция

$$< \vec{v}'(\vec{r} + \vec{\zeta})\vec{v}'(\vec{r}) > = \sum_i H_4^{ii}(\vec{\zeta}).$$

Для моментов H_4^{22} и H_4^{11} аналогичными свойствами обладают соответственно оси ζ_3 и ζ_2. Вращение системы координат около этих осей не меняет величины корреляционного момента. Четность моментов для всех переменных определяет инвариантность корреляций относительно отражений вектора $\vec{\zeta}$ в плоскостях $\zeta_i = 0$.

АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛОСКИХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Анализ корреляций элементов гидродинамического поля для пространственной фильтрации дан в первом и втором разделах данной главы. Ниже приводятся соответствующие корреляции, вычисленные для плоского квазиодномерного течения, ориентированного вдоль оси x.

Поле гидродинамического давления

Для дисперсии давления имеем

$$H_1(\vec{r}, \vec{r}) = < p'^2(\vec{r}) > = \frac{\pi a^2}{k_0^2} \int_0^\infty \frac{\Phi(\varkappa)}{\varkappa} d\varkappa, \tag{5.34}$$

где Φ — спектральная плотность поля проницаемости — двумерное преобразование Фурье корреляционной функции проницаемости.

Для того чтобы интеграл в (5.34) сходился, необходимо выполнение условия

$$\int_0^\infty K(r)\, r dr = 0, \tag{5.35}$$

где K — корреляционная функция проницаемости.

Таким образом, лишь выполнение условия (5.35) гарантирует конечность дисперсии поля давления при фильтрации на неограниченной плоскости. Уместно напомнить, что в трехмерном пространстве H_1 всегда конечно при ограниченной дисперсии поля проницаемости.

Как и в трехмерном случае, давление не коррелирует с проницаемостью

$$< p'(\vec{r})\, k'(\vec{r}) > = 0.$$

Ковариационная матрица остальных элементов поля приведена в табл. 10, а в табл. 11 представлены коэффициенты взаимной корреляции элементов поля.

КОРРЕЛЯЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Результаты, полученные в предыдущих разделах данной главы, справедливы в том случае, когда поле $k(\vec{r})$ статистически однородно и изотропно. Не меньший интерес представляет исследование фильтрационных полей в анизотропных средах. При этом можно рассмотреть два различных варианта. Во-первых, поле $k(\vec{r})$ может быть локально анизотропно, т. е. проницаемость в точке может быть в различных направлениях разной, но если анизотропные элементы достаточно хорошо перемешаны в пространстве,

ТАБЛИЦА 10

Элемент поля	k	$\partial p_1/\partial x_1$	$\partial p_1/\partial x_2$	v_1'	v_2'	E'
k'	D	$-\frac{1}{2}\alpha^2\zeta_0^2\zeta^2$	0	$-\frac{1}{2}\alpha k_0^2\zeta^2$	0	0
$\partial p_1/\partial x_1$		$\frac{3}{8}\alpha^2\zeta_0^2\zeta^2$	0	$\frac{1}{8}\alpha^2 k_0^2\zeta^2$	0	$\frac{1}{4}\alpha^3 k_0^2\zeta^2$
$\partial p_1/\partial x_2$			$\frac{1}{8}\alpha^2\zeta_0^2\zeta^2$	0	$-\frac{1}{8}\alpha^2 k_0^2\zeta^2$	0
v_1'				$\frac{3}{8}\alpha^2 k_0^2\zeta^2$	0	$-\frac{1}{4}\alpha^3 k_0^2\zeta^2$
v_2'					$\frac{1}{8}\alpha^2 k_0^2\zeta^2$	0
E'						$\frac{1}{2}\alpha^4 k_0^2\zeta^2$

ТАБЛИЦА 11

Элемент поля	k	$\partial p_1/\partial x_1$	$\partial p_1/\partial x_2$	v_1'	v_2'	E'
k'	1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sign}\alpha$	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sign}\alpha$	0	0
$\partial p_1/\partial x_1$		1	0	1/3	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sign}\alpha$
$\partial p_1/\partial x_2$			1	0	−1	0
v_1'				1	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sign}\alpha$
v_2					1	0
E'						1

корреляционная функция такого поля будет изотропной. Во-вторых, возможен вариант, когда проницаемость в точке изотропна, а корреляционная функция поля анизотропна. По-видимому, второй вариант представляет наибольший интерес хотя бы потому, что реальные пласты вследствие слоистости обладают анизотропией именно такого рода.

Рассмотрим следующий пример анизотропии. Будем полагать, что среда состоит из множества однородных и изотропных блоков, по форме близких к параллелепипеду. Проницаемость блоков

случайна. Если блоки размещены в пространстве достаточно упорядоченно, такая среда будет макроанизотропной. Это отчетливо видно на предельном примере слоистой системы, состоящей из слоев различной случайной проницаемости.

Итак, будем полагать, что масштабы корреляции проницаемости по различным осям различны и равны соответственно ζ_1, ζ_2, ζ_3. Пусть, например, нормированная корреляционная функция проницаемости имеет вид

$$K(\vec{r}) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) f_3(x_3), \tag{5.36}$$

и, следовательно, выражение для спектральной плотности можно записать в виде

$$\Phi(\vec{\varkappa}) = \Phi_1(\varkappa_1)\, \Phi_2(\varkappa_2)\, \Phi_3(\varkappa_3),$$

$$\Phi_i(\varkappa_i) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa_i z} f_i(z)\, dz. \tag{5.37}$$

Рассмотрим сначала двумерные структуры, задание которых в рамках рассматриваемой модели возможно, в частности, условиями $f_3(x_3) = 1$ или $\Phi_3(\varkappa_3) = \delta(x_3)$, что физически эквивалентно трубчатым структурам $\zeta_3 \to \infty$, вытянутым вдоль оси x_3. Вычислим наиболее важный безразмерный корреляционный момент

$$\tilde{H}_3^i = < k' \partial p/\partial x_i > / D\alpha k_0^{-1}$$

$$\tilde{H}_3^i = -\int_{-\infty}^{\infty}\int\int \frac{x_i x_i}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \Phi(\varkappa)\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{5.38}$$

Подставив в (5.38) равенство (5.37), с учетом условия $\Phi_3 = \delta(\varkappa_3)$ найдем

$$\tilde{H}_3^1 = -\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \Phi_1(\varkappa_1)\, \Phi_2(\varkappa_2)\, d\varkappa_1 d\varkappa_2, \quad H_3^2 = H_3^3 = 0. \tag{5.39}$$

Для получения достаточно простых зависимостей нужно так подобрать Φ_i, чтобы интеграл в (5.39) можно было вычислить аналитически. Выбрав f_i в виде

$$f_i(x_i) = \sin(\pi x_i/\zeta_i)/(\pi x_i/\zeta_i) \tag{5.40}$$

и, следовательно,

$$\Phi_i(\varkappa_i) = \begin{cases} \zeta_i/2\pi, & |\varkappa_i| < \pi/\zeta_i, \\ 0, & |\varkappa_i| > \pi/\zeta_i, \end{cases} \tag{5.41}$$

такие вычисления легко реализовать и получить из (5.39)

$$-\tilde{H}_3^1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} + \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right) \operatorname{arctg} \frac{\zeta_2}{\zeta_1}. \tag{5.42}$$

Несколько сложнее случай, когда корреляционная функция выбирается в виде

$$\bar{f}_i(x_i) = \left[\sin\frac{\pi x_i}{2\zeta_i}\Big/\frac{\pi x_i}{2\zeta_i}\right]^2 \tag{5.43}$$

и, следовательно,

$$\bar{\Phi}_i(\varkappa_i) = \begin{cases} \dfrac{\zeta_i}{\pi}\left(1 - \dfrac{\varkappa_i\zeta_i}{\pi}\right), & |\varkappa_i| \leqslant \pi/\zeta_i, \\ 0, & |\varkappa_i| > \pi/\zeta_i. \end{cases} \tag{5.44}$$

Подставив (5.44) в интеграл (5.39), после довольно громоздких преобразований получим

$$-\bar{H}_3' = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - \frac{2}{3}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} + \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right)\operatorname{arctg}\frac{\zeta_2}{\zeta_1} + \frac{1}{6}\frac{\zeta_1^2}{\zeta_2^2} \times$$

$$\times \ln\frac{\zeta_1^2+\zeta_2^2}{\zeta_1^2} - \frac{1}{6}\frac{\zeta_2^2}{\zeta_1^2}\ln\frac{\zeta_1^2+\zeta_2^2}{\zeta_2^2}. \tag{5.45}$$

Вычисление по формулам (5.42) и (5.45) во всем диапазоне изменения параметра ζ_2/ζ_1 показывает, что вид корреляционной функции несущественно влияет на величину корреляционного момента. Представление о степени различия $\bar{H}_3'$ и $\bar{\bar{H}}_3'$ дает табл. 12.

ТАБЛИЦА 12

$\varepsilon_2/\varepsilon_1$	$-H_3'$	$-\bar{H}_3'$	$-\bar{\bar{H}}_3'$	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$	$-H_3'$	$-\bar{H}_3'$	$-\bar{\bar{H}}_3'$
0,01	0,008	0,010	0,006	2	0,686	0,667	0,705
0,1	0,075	0,092	0,063	10	0,925	0,908	0,936
0,5	0,313	0,332	0,295	50	0,984	0,980	0,987
1	0,500	0,500	0,500	100	0,992	0,990	0,994

При вычислении корреляций иногда употребляется аппроксимация корреляционной функции, получившая название ε-корреляции

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 1, & |x_i| \leqslant \varepsilon_i, \\ 0, & |x_i| > \varepsilon_i. \end{cases} \tag{5.46}$$

Очевидно, ε-корреляция зависит от вектора $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и в пространстве $\vec{r}$ может быть изображена следующим образом. Она равна единице в параллелепипеде, ребра которого ε_1, ε_2, ε_3 и равна нулю вне его. Легко видеть, что даже в случае равенства всех ε_i такая корреляционная функция не будет изотропной, так как параллелепипед перейдет в куб, а не в сферу, что необходимо для изотропии.

Строго говоря, функцию (5.46) можно использовать для аппроксимации корреляционной функции лишь условно, поскольку ее спектральная плотность

$$\Phi(\varkappa_i) = \sin\varkappa_i\varepsilon_i/(\varkappa_i\varepsilon_i) \tag{5.47}$$

при определенных значениях частот $\varkappa_i$ принимает отрицательные значения, чего, как известно, не должно быть, если f_i — «настоящая» корреляционная функция. Поэтому использование подобных аппроксимаций может приводить к погрешностям, которые следует оценивать в каждом конкретном случае.

Рассмотрим, например, вычисление H_3^1 в том случае, если поле проницаемости изотропно, а корреляционная функция аппроксимируется изотропной ε-корреляцией

$$K(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & |\vec{r}| < \varepsilon, \\ 0, & |\vec{r}| > \varepsilon. \end{cases} \tag{5.48}$$

В трехмерном случае ей соответствует спектральная плотность

$$\Phi(\varkappa) = \frac{\sin \varkappa\varepsilon - \varkappa\varepsilon \cos \varkappa\varepsilon}{2\pi^2 \varkappa^3}, \tag{5.49}$$

являющаяся знакопеременной, убывающей по модулю функцией $\varkappa$, имеющей максимум при $\varkappa = 0$. При интегрировании, очевидно,

$$\tilde{H}_3^1 = -\int \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa^2} \Phi(\varkappa) d\varkappa^3 = -\frac{1}{3}\int \Phi(\varkappa) d\varkappa^3 = -\frac{1}{3}, \tag{5.50}$$

т. е. получен точный результат, несмотря на то, что использованы ε-корреляция и ее спектральная плотность. Конечно, причина этого — то, что реализуется функционал от спектральной плотности, в данном случае, интеграл от нее.

Далее, используя ε-корреляцию, мы получим простую формулу для момента H_3^1, а затем сравним результаты расчета по ней и ранее полученным формулам.

Итак, в случае ε-корреляции (5.46), интегрируя (5.21) по частям, имеем

$$\overline{\overline{H}}_3^1 = \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \int_{-\varepsilon_3}^{\varepsilon_3} G_{\zeta_1}(\rho)\, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \tag{5.51}$$

После несложных преобразований отсюда следует

$$\overline{\overline{H}}_3^1 = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}}, \quad \overline{\overline{H}}_3^2 = \overline{\overline{H}}_3^3 = 0. \tag{5.52}$$

Интересно, что при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$, как и в случае изотропии $\overline{\overline{H}}_3^1 = -1/3$.

Положив в (5.52) параметр $\varepsilon_3 \to \infty$, получим простую формулу

$$\overline{\overline{H}}_3^1 = -2\pi^{-1} \operatorname{arctg}(\varepsilon_2/\varepsilon_1). \tag{5.53}$$

Результаты вычислений $\overline{\overline{H}}_3^1$ по формуле (5.53) представлены в третьей строке табл. 12. Нетрудно видеть, что результаты расчетов по всем формулам довольно близкие. При изображении трех зависимостей на графике кривые практически совпадают.

Вернемся к рассмотрению корреляции $\tilde{H}_3^1$ в трехмерном случае. Используя корреляции f_i в виде (5.43), получим довольно громоздкие формулы

$$\tilde{H}_3^1 = 1 - \frac{\pi}{2\alpha\beta}(I_{11} + I_{12}) + \frac{1}{\alpha\beta}(I_{21} + I_{22}), \qquad (5.54)$$

где

$$\alpha = \varepsilon_1/\varepsilon_2,\ \beta = \varepsilon_1/\varepsilon_3,\ \varphi^* = \operatorname{arctg}\beta/\alpha,$$

$$I_{11} = \frac{\alpha^3}{3}\left\{\frac{\sin\varphi^*}{2\cos^2\varphi^*} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^*}{2}\right)\right|\right\},$$

$$I_{12} = \frac{\beta^3}{3}\left\{\frac{\cos\varphi^*}{2\sin^2\varphi^*} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi^*}{2}\right|\right\},$$

$$I_{21} = -\frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\alpha^3}{3}\int_0^{\varphi^*}\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{1}{6}\int_0^{\varphi^*}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi,$$

$$I_{22} = -\frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\beta^3}{3}\int_{\varphi^*}^{\pi/2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\sin\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi} + \frac{1}{6}\int_{\varphi^*}^{\pi/2}\ln\left(1 + \frac{\beta^2}{\sin^2\varphi}\right)d\varphi.$$

Результаты расчетов по формулам (5.54) и (5.52) представлены в табл. 13 в виде дроби, числитель которой соответствует формуле (5.54), а знаменатель подсчитан по простой формуле (5.52). Поскольку $\tilde{H}_3^1\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\right) = \tilde{H}_3^1\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$, значения моментов в незаполненных клетках таблицы идентичны числам, находящимся в клетке, симметричной относительно главной диагонали.

ТАБЛИЦА 13

$\varepsilon_3/\varepsilon_1$	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$								
	0,01	0,05	0,1	0,2	1	5	10	20	100
0,01	0 0	0,001 0	0,002 0,001	0,003 0,001	0,006 0,005	0,007 0,006	0,008 0,006	0,008 0,006	0,008 0,006
0,05	0	0,004 0,002	0,008 0,003	0,013 0,006	0,029 0,022	0,037 0,031	0,038 0,032	0,038 0,032	0,038 0,032
0,1			0,014 0,006	0,024 0,012	0,057 0,045	0,073 0,062	0,074 0,063	0,075 0,063	0,075 0,063
0,2				0,043 0,024	0,107 0,089	0,139 0,123	0,142 0,125	0,143 0,125	0,144 0,126
1					0,333 0,333	0,478 0,488	0,493 0,497	0,498 0,499	0,500 0,500
5						0,786 0,823	0,830 0,859	0,847 0,870	0,856 0,874
10							0,886 0,910	0,911 0,929	0,924 0,936
20								0,942 0,955	0,960 0,968
100									0,988 0,991

Как и в двумерном случае, результаты расчетов по различным формулам довольно близки. Исключением является область, где значения моментов малы и где важен лишь порядок величин.

Таким образом результаты сопоставления расчетов H_3^i показывают, что значения момента слабо зависят от выбора корреляционной функции и, в частности, допустимо использовать модель ε-корреляции.

Рассмотрим теперь корреляции полей гидродинамических элементов, считая, что поле $k'(\vec{r})$ однородно и ε-коррелировано, причем ограничимся исследованием моментов H_2^{ij}, поскольку через них и ранее вычисленные H_3^i выражаются корреляции остальных элементов.

Итак, в соответствии с (5.18) имеем

$$H_2^{ij}(\vec{r}, \vec{r}) = k_0^{-2}\alpha^2 \int B^{ij}(\rho) K^*_{\zeta_i\zeta_1}(\vec{\rho}) d\rho^3. \qquad (5.55)$$

Отличие формулы (5.55) от (5.19) состоит в том, что если в изотропном случае корреляционная функция зависит от $|\vec{\rho}|$, то в (5.55) это функция вектора.

Интегрируя в (5.55) дважды по частям и учитывая, что нормированная корреляционная функция равна единице в ε-параллелепипеде, формулу перепишем так:

$$H_2^{ij}(\vec{r}, \vec{r}) = -\frac{D}{k_0^2}\alpha^2 \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1}\int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2}\int_{-\varepsilon_3}^{\varepsilon_3} \frac{\partial^2 B^{ij}(\rho)}{\partial\zeta_1}\, d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3.$$

Используя для B^{ij} выражение (5.15), получим после довольно громоздких вычислений компоненты тензора H_2^{ij}:

$$H_2^{11} = \frac{D}{\pi k_0^2}\alpha^2\left[2\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1\varepsilon_*} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_*^2\right)}{\varepsilon_*\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_*^2+\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\right)}\right],$$

$$H_2^{22} = \frac{D}{\pi k_0^2}\alpha^2\left[\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_*^2\right)}{\varepsilon_*\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_*^2+\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\right)} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_*\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_3^2\right)}\right], \qquad (5.56)$$

$$H_2^{33} = \frac{D}{\pi k_0^2}\alpha^2\left[\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_*^2\right)}{\varepsilon_*\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_*^2+\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\right)} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_*\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)}\right],$$

$$H_2^{12} = H_2^{13} = H_2^{23} = H_2^{21} = H_2^{31} = H_2^{32} = 0. \quad \varepsilon_*^2 = \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2.$$

Проанализируем полученные формулы. Пусть, например $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$.

Тогда

$$H_2^{11} = \frac{D}{k_0^2}\alpha^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\right) = \frac{D}{k_0^2}\alpha^2 \cdot 0{,}149,$$

$$H_2^{22} = H_2^{33} = Dk_0^{-2}\alpha^2/\pi 2\sqrt{3} = Dk_0^{-2}\alpha^2 0{,}092.$$

Для инварианта H_2 получим ту же формулу, что и в случае изотропного поля, $H_2 = D\alpha^2/3k_0^2$. Хотя инвариант тензора H_2 не изменился, соотношение между H_2^{11} и H_2^{22} уменьшилось примерно вдвое за счет роста H_2^{22} и H_2^{33}. Иными словами, даже такая слабая анизотропия, как в случае $\varepsilon_i = \varepsilon$, приводит к относительному выравниванию дисперсии компонент градиента давления.

Из формул (5.56) легко получить соответствующие формулы для плоских и одномерных полей. Так, положив в них $\varepsilon_3 = \infty$, легко выписать дисперсии компонент градиента давления плоского поля, расположенного в плоскости x_1x_2

$$H_2^{11} = \frac{D\alpha^2}{\pi k_0^2}\left[2\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right],\quad H_2^{22} = \frac{D\alpha^2}{\pi k_0^2}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}. \qquad (5.57)$$

Предположив и в этом случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, найдем

$$H_2^{11} = D\alpha^2 k_0^{-2}\,0{,}34;\ H_2^{22} = D\alpha^2 k_0^{-2}\cdot 0{,}16.$$

Инвариант H_2 и в этом случае имеет вид $H_2 = D\alpha/2k_0^2$. И, наконец, из формул (5.57) получим формулу для одномерного течения вдоль оси x_1. Положив $\varepsilon_2 = \infty$, найдем $H_2^{11} = D\alpha^2/k_0^2$, т. е. дисперсия градиента давления в отличие от случая пространства и плоскости не зависит от масштаба корреляции. Уместно сделать следующее замечание. При постановке задачи о поле гидродинамического давления было принято дополнительное условие, фиксирующее значение среднего градиента давления ∇p_0, при этом давление разыскивалось в виде ряда (5.6), для членов которого по построению вытекало условие $\langle p_i \rangle = 0$ при $i = 1, 2, \ldots$ Возможна и другая постановка задачи. Пусть в качестве дополнительного условия фиксируется средняя скорость течения $\vec{v}_0$. Тогда давление надо искать в виде ряда (5.6), но при этом под p_0 понимать функцию, определенную равенством $\nabla p_0 = -\vec{v}_0\mu k_0^{-1}$.

Если поле средней скорости $\vec{v}_0$ не имеет источников, а именно этот случай достаточно интересен, p_0 удовлетворяет невозмущенному уравнению, а для p_i при $i = 1, \ldots$ можно написать уравнения (5.7) с соответствующими условиями на бесконечности. Существенным отличием будет то, что при новой постановке задачи для всех p_i, за исключением p_1, выполняется условие $\langle p_i \rangle \neq 0$. Поэтому, считая возмущение достаточно малым, можно ограничиться приближением $\vec{p}(\vec{r}) = p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r})$. Отсюда следует, что все корреляции, вычисленные ранее, сохраняются и в случае задания $\vec{v}_0$ с тем отличием, что во всех формулах вместо $\partial p_0/\partial x_1$ необходимо подставить величину $-v_0\mu/k_0$. При этом подразумевается, что вектор $\vec{v}_0$ и ось x_1 параллельны.

В заключение отметим, что приведенный анализ корреляций элементов гидродинамического поля был основан на первом приближении метода возмущений, что, конечно, ограничивает рассмотрение случаем достаточно слабо флуктуирующих полей. Можно показать, что аналогичный анализ реализуем в рамках теории самосогласованного поля, излагаемой в следующей главе, и пригодной для сильных флуктуаций.

ВИХРЬ ПОЛЯ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

При изучении кинематики и динамики жидкостей и газов в пористой среде в современной теории фильтрации традиционен уровень рассмотрения, оперирующий с такими статистическими понятиями, как скорость фильтрации, среднее давление и т. д. При этом остаются вне рассмотрения чрезвычайно нерегулярные характеристики движения жидких частиц в индивидуальных поровых каналах. Под частицей при таком уровне усреднения следует подразумевать достаточно большую часть порового пространства, занятого жидкостью. Перемещение таких частиц в пространстве, вообще говоря, сопровождается и их вращением. Следует ожидать, что механизм вращения жидких частиц в существенной степени определяет характеристики переноса примеси, транспортируемой потоком, и, следовательно, представляет интерес изучение вихря поля скорости фильтрации.

Заметим, что в исследованиях по теории фильтрации не принято изучать распределение вихрей, что, вероятно, связано с тем, что в наиболее изученном случае фильтрации однородной жидкости в однородной пористой среде вихрь скорости фильтрации равен нулю. Кроме того, во многих задачах цель исследования — определение связи между потоком и давлением, для которой практически несущественны индивидуальные деформации жидких частиц.

Далее в корреляционном приближении теории возмущений рассматривается поле вихря скорости фильтрации в среде со случайными неоднородностями. Вычисляется корреляционный тензор вихря, корреляция вихря с полем проницаемости, циркуляция скорости для пространственных и плоских течений [36].

Введем в рассмотрение вектор $\vec{\Omega}$ — вихрь поля скорости фильтрации $\vec{v}$

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}. \tag{5.58}$$

Как известно, компоненты $\vec{\Omega}$ в среде с постоянной пористостью определяют угловые скорости собственного вращения жидких частиц относительно соответствующих осей.

Рассмотрим поле вихря квазиодномерного стохастически однородного фильтрационного течения в среде со случайными неодно-

родностями. Легко убедиться, что $\langle\vec{\Omega}\rangle$ — средний вихрь такого течения равен нулю. Действительно,

$$\langle\vec{\Omega}\rangle = \nabla\times\langle\vec{v}\rangle,$$

а так как $\langle\vec{v}\rangle = \vec{v}_0 = \text{const}$, то имеем $\langle\vec{\Omega}\rangle = 0$.

Пусть среднее течение направлено вдоль оси x_1. Тогда

$$\begin{gathered} v_1 = v_0 + v_1,\ \langle v_1\rangle = v_0 = \text{const}, \\ v_2 = v_2,\ v_3 = v_3,\ \langle v_2\rangle = \langle v_3\rangle = 0, \\ v_1' = -\left(k'\frac{\partial p_0}{\partial x_1} + k_0\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right),\quad v_2' = k_0\frac{\partial p_1}{\partial x_2},\quad v_3' = k_0\frac{\partial p_1}{\partial x_3}. \end{gathered} \tag{5.59}$$

Подставив (5.59) в (5.58), получим

$$\Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = \frac{\partial k'}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial p_0}{\partial x_1},\ \Omega_3 = \frac{\partial k'}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial p_0}{\partial x_1}. \tag{5.60}$$

Таким образом, при фильтрации жидкие частицы (конечно, макрочастицы) не вращаются вокруг оси, направленной вдоль среднего течения.

Вычислим корреляционный тензор вектора вихря

$$\Omega^{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle\Omega_i(\vec{r}_1)\,\Omega_j(\vec{r}_2)\rangle. \tag{5.61}$$

Подставив в (5.61) соотношения (5.60), получим

$$\begin{gathered} \Omega^{ij} = 0,\ i = 1, 2, 3, \\ \Omega^{22} = \alpha^2\frac{\partial^2 K(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial x_{31}\partial x_{32}},\ \Omega^{33} = \alpha^2\frac{\partial^2 K(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial x_{21}\partial x_{22}}, \\ \Omega^{23} = -\alpha^2\frac{\partial^2 K(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial x_{22}\partial x_{31}}. \end{gathered} \tag{5.62}$$

Если $K(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = D\exp[-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2/a^2]$, корреляции имеют вид

$$\begin{gathered} \Omega^{22} = 2\zeta^2 v_0^2 a^{-2}e^{-r^2/a^2}[1 - 2x_3^2 a^{-2}], \\ \Omega^{33} = 2\zeta^2 v_0^2 a^{-2}e^{-r^2/a^2}[1 - 2x_2^2 a^{-2}], \\ \Omega^{23} = -4\zeta^2 v_0^2 a^{-4}e^{-r^2/a^2}x_2 x_3. \end{gathered} \tag{5.63}$$

Из (5.63) для одноточечных корреляций следует

$$\Omega^{ij} = 2\zeta^2 v_0^2 a^{-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.64}$$

При рассмотрении фильтрации в средах со случайными неоднородностями будем считать внутренним временным масштабом переноса величину $T = am/v_0$. Как видно из (5.64), внутренний времен-

ной масштаб вращения равен $\tau = am/v_0\sqrt{2\zeta}$. Отношение временных масштабов характеризует относительную роль механизмов переноса и вращения. Имеем

$$T/\tau = \zeta\sqrt{2}, \tag{5.65}$$

и при ζ порядка единицы отношение характерных времен указывает на значимость механизма вращения.

Рассматривая корреляции вектора вихря с другими элементами фильтрационного поля, можно показать, что все одноточечные моменты равны нулю, что, конечно, не исключает того, что разноточечные моменты отличны от нуля.

Перейдем к анализу плоского поля. Положив в (5.59) флуктуацию $v_3 = 0$, получим

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \Omega = \frac{\partial k'}{\partial x_2}\frac{\partial p_0}{\partial x_1}. \tag{5.66}$$

Отсюда следует

$$<\Omega^2(\vec{r})> = 2\frac{\zeta^2 v_0^2}{a^2}e^{-r^2/a^2}\left[1 - 2\frac{x_2^2}{a^2}\right],$$

$$<\Omega^2(0)> = 2\zeta^2 v_0^2/a^2. \tag{5.67}$$

Анализ формулы (5.67) показывает, что для любой точки на плоскости x_1x_2 существует полоса шириной $a\sqrt{2}$, ориентированная вдоль первой оси, т. е. параллельно скорости среднего течения, внутри которой вихри положительно коррелируют с вихрем в этой точке, которую мы считаем расположенной на средней линии полосы. Вне полосы вихри с центральным вихрем коррелируют отрицательно.

Для корреляции вихря и проницаемости имеем

$$<\Omega k'> = 2k_0 v_0 \zeta^2 a^{-2} x^2 e^{-r^2/a^2}, \tag{5.68}$$

т. е. вихрь не коррелирует с проницаемостью в точках, лежащих на прямой, параллельной среднему течению. Корреляции с проницаемостью в точках, лежащих по разные стороны от этой прямой, имеют разные знаки.

Важная характеристика вихревого течения — циркуляция скорости по некоторому замкнутому контуру C с ориентированным элементом $\vec{d\sigma}$

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}\vec{d\sigma}. \tag{5.69}$$

Согласно теореме Стокса имеем

$$\Gamma = \int_\Sigma (\vec{\Omega}\vec{n})\, ds, \tag{5.70}$$

где Σ — произвольная поверхность, натянутая на контур C; ds — элемент этой поверхности; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности.

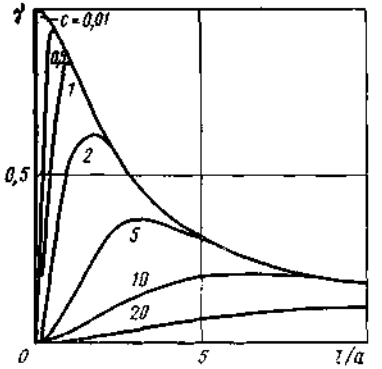


Рис. 19. Зависимость безразмерной циркуляции скорости фильтрации γ от параметра l/a для различных $c = l/b$

Рассмотрим плоское течение, а в качестве контура C выберем прямоугольник со сторонами $2l$ и $2b$, ориентированными вдоль первой и второй осей соответственно. Из (5.62), (5.69) и (5.70) следует

$$\Gamma' = \alpha\left[\int_{-l}^{l} k'(x_1, b)\,dx_1 - \int_{-l}^{l} k'(x_1, -b)\,dx_1\right]. \quad (5.71)$$

Отсюда для дисперсии циркуляции получим

$$\langle\Gamma'^2\rangle = 2\alpha^2\left[\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} K(x, x', b, b)\times\right.$$

$$\left.\times\,dx\,dx' - \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} K(x, x', b, -b)\,dx\,dx'\right]. \quad (5.72)$$

Пусть $K = D\exp(-r^2/a^2)$. Тогда, вычислив интегралы в (5.72), найдем

$$\langle\Gamma'^2\rangle = D\alpha^2 l^2\left(1 - e^{-\frac{4b^2}{a^2}}\right) f(l/a), \quad (5.73)$$

где функция f определена формулой (2.16). График функции $\gamma = \langle\Gamma'^2\rangle/\alpha^2 l^2 D$ при различных l/b приведен на рис. 19. Очевидно, мелко- и крупномасштабные флуктуации проницаемости слабо влияют на циркуляцию. Наибольший вклад определяется неоднородностями, размер которых близок к масштабу контура, по которому вычисляется циркуляция.

Завершая краткий анализ вихря скорости фильтрации в неоднородных средах, отметим некоторые его особенности.

Очевидно, в стохастически однородных средах средняя завихренность равна нулю, такие поля в среднем потенциальны. Изучение лишь средних полей в этом случае приводит к потере важных качественных особенностей потока, связанных с вихревым характером флуктуаций поля скорости, проявляющимся в механизме переноса жидкости и всякого рода примесей.

В отличие от гидродинамики жидкой среды, фильтрационный поток не является носителем вихревого поля. Оно жестко связано с пористой средой (ее структурой) и при стационарной фильтрации не зависит от времени. Вращение жидкой «частицы» определяется точкой пространства, в которой эта частица находится в данный момент времени.

ГЛАВА 6

ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Для многих физических процессов в неоднородных средах (теплопроводность, электропроводность, фильтрация жидкостей и газов и т. д.) характерна математически эквивалентная задача определения макроскопической или, как часто говорят, эффективной проводимости системы на основании информации о структуре поля локальной проводимости. Наиболее интересен и практически важен стохастический вариант этой задачи, т. е. тот случай, когда локальное поле проводимости может трактоваться как случайное.

Истолкование проблемы неоднородности с вероятностной точки зрения определяет пути нахождения эффективной проводимости. В самом деле, решая соответствующую задачу в среде со случайными неоднородностями и определяя математическое ожидание решения или некоторых его функционалов, мы тем самым автоматически находим эффективные характеристики. Следует иметь в виду, что эффективные характеристики системы, найденные при решении одной задачи, могут оказаться непригодными для другой задачи, решаемой для той же системы. Дело в том, что если масштаб неоднородности сравним с размерами системы, эффективная проводимость зависит не только от свойств среды, но и от размеров области и типа условий на ее границе. Иными словами, эффективные характеристики зависят от условий задачи в целом и, следовательно, должны определяться в каждом отдельном случае.

Иначе обстоит дело в том случае, когда размеры области велики по сравнению с масштабом неоднородности. Рассматривая неограниченную среду, мы исключаем влияние типа краевых условий на эффективные характеристики. Однако и в этом случае эффективная проводимость должна так или иначе зависеть от всех параметров, определяющих случайное поле локальной проводимости, например, от всех моментов случайного поля. Поэтому формулы для эффективной проводимости, если они достаточно универсальны, должны иметь очень сложную структуру. Отсюда следует, что реалистическую постановку проблемы определения эффективной проводимости можно связать с поиском достаточно простых приближенных зависимостей для широких классов полей и, как исключение, точных формул для сред относительно простой структуры.

Перейдем к формулировке задачи об отыскании эффективной проводимости неоднородной среды. Пусть локальные поток $\vec{v}$ и поле $\vec{h}$ связаны системой соотношений

$$\vec{v} = \sigma\vec{h}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{h} = 0. \tag{6.1}$$

Если трактовать систему (6.1) как фильтрационные соотношения, то в случае фильтрации однородной жидкости в неоднородной по проводимости среде под $\vec{v}$ следует понимать вектор скорости фильтрации, векторное поле $\vec{h}$ определяется потенциалом-давлением p, $\vec{h} = -\nabla p$, локальная проводимость $\sigma = k/\mu$ является случайным тензором, зависящим от координат. Вводя в рассмотрение средние по объему потоки и поля

$$\vec{V} = \langle \vec{v} \rangle, \quad \vec{H} = \langle \vec{h} \rangle, \tag{6.2}$$

определим тензор эффективной проводимости σ^* из равенства

$$\vec{V} = \sigma^* \vec{H}. \tag{6.3}$$

Если к системе (6.1) в качестве дополнительного условия присоединить зафиксированное среднее поле $\vec{H}$ либо средний поток $\vec{V}$, то решив соответствующую задачу, следует найти соответственно $\vec{V}$ либо $\vec{H}$. Знание $\vec{V}$ и $\vec{H}$ дает возможность в соответствии с (6.3) найти σ^* — эффективную проводимость.

Локальную σ и эффективную — σ^* проводимости иногда называют динамическими модулями, поскольку они связывают динамические характеристики — потоки и поля. При вычислении локальной диссипируемой энергии

$$e = \vec{v}\vec{h} = \vec{h}\sigma\vec{h} = \vec{v}\,(\sigma)^{-1}\vec{v} \tag{6.4}$$

используется также локальный динамический модуль σ. Возникает вопрос о вычислении эффективных энергетических модулей, которые можно определить по формулам, аналогичным (6.4)

$$E = \langle e \rangle = \vec{H}\sigma_э^*\vec{H} = \vec{V}\,(\sigma_э^*)^{-1}\vec{V}. \tag{6.5}$$

Можно показать, что в случае, если поля $\vec{h}$ и $\vec{v}$ стохастически однородны и однородно связаны, динамические и энергетические модули тождественны. Действительно, записав

$$E = \langle e \rangle = \langle \vec{v}\vec{h} \rangle = \vec{V}\vec{H} + \langle \vec{v}'\vec{h}' \rangle, \tag{6.6}$$

перейдем к вычислению корреляционного момента $\langle \vec{v}'\vec{h}' \rangle$. Поскольку $\operatorname{rot} \vec{h} = 0$, поле $\vec{h}$ имеет потенциал p, представленный в виде

$$p = -\vec{r}\vec{H} + \lambda, \tag{6.7}$$

где скалярное поле λ стохастически однородно и $\langle \lambda \rangle = 0$.

Итак

$$\langle \vec{v}'\vec{h}' \rangle = -\langle \vec{v}' \nabla\lambda \rangle = -\langle \operatorname{div}(\vec{v}'\lambda) \rangle + \langle \lambda \operatorname{div} \vec{v}' \rangle, \tag{6.8}$$

но, так как $\langle \vec{v}'\lambda \rangle = \text{const}$, а $\operatorname{div} \vec{v}' = 0$, оба члена в последнем равенстве равны нулю и, таким образом,

$$\langle \vec{v}'\vec{h}' \rangle = 0, \tag{6.9}$$

т. е. след взаимной корреляционной матрицы поля и потока равен нулю.

Подставляя (6.9) в (6.6), получим

$$E = \vec{V}\vec{H}. \tag{6.10}$$

Затем, используя формулу (6.3), найдем

$$E = \vec{H}\sigma^*\vec{H} = \vec{V}\,(\sigma^*)^{-1}\vec{V}. \tag{6.11}$$

Сравнив (6.11) с (6.5), получим

$$\sigma^* = \sigma_9^*, \tag{6.12}$$

т. е. динамические и энергетические эффективные проводимости в однородных неограниченных средах действительно тождественны.

Рассмотрим кратко развитие методов определения эффективной проводимости. При этом из множества работ, посвященных эффективным параметрам, выделим лишь некоторые, связанные либо с новыми подходами к решению задачи, либо с новыми результатами. К тому же, поскольку определение эффективных параметров различных полей — задачи математически полностью или частично эквивалентные, многие результаты независимо и многократно были получены и опубликованы различными авторами [43].

Есть основание полагать, что впервые задача вычисления эффективных параметров неоднородных систем приведена в работах Пуассона, изучавшего магнитные свойства неоднородных систем с включениями. Позднее Моссоти, а затем и Клаузиус применили метод Пуассона для исследования неоднородных диэлектриков. Рассмотрение задач подобного типа в оптике связано с именами Лоренца и Лорентца, изучавших коэффициенты преломления сред в зависимости от поляризуемости и концентрации частиц.

В работах Максвелла, Рэлея рассмотрена задача о проводимости систем матричного типа с включениями иной проводимости, размещенными регулярно либо хаотически, получены формулы для эффективной проводимости таких систем, верные в приближении малой концентрации включений, показано фундаментальное значение для систем с редкими включениями задачи о единственном включении в неограниченной однородной среде.

Подход, развитый в работах Максвелла и Рэлея, породил огромное количество публикаций, в которых рассмотрены различные частные задачи и получены асимптотические формулы для эффективной проводимости. Некоторое представление об этих работах можно получить из большого обзора К. Лихтенеккера [43], обзорной части статьи Д. Бруггемана [39].

Для расчета эффективных характеристик использовались представления теории самосогласованного поля, развитые первоначально в физических работах, связанных с анализом многочастичных взаимодействий. Принцип самосогласования состоит в том, что при расчете поля внутри включения считается, что оно окружено «эффективной» средой, т. е. средой, проводимость которой тождественна искомой эффективной проводимости. Усредняя рассчитанное таким образом поле по всем включениям и полагая его равным заданному макроскопическому полю, получим уравнение для отыскания эффективной проводимости.

Вероятно, первые самосогласованные параметры вычислены в работе Д. Бруггемана [39]. Позднее аналогичные результаты были получены В. И. Оделевским [25], Р. Ландауэром [42] и многими другими авторами.

Следует отметить, что хотя при расчетах методом самосогласования предполагается, что концентрация включений не слишком велика, результаты сопоставления с экспериментом [25, 42], независимыми прямыми расчетами методом Монте-Карло [32], сопоставления с известными точными решениями показывают исключительно высокую точность самосогласованных характеристик практически во всем диапазоне изменения концентрации включений. Метод самосогласования дает правильные оценки критических концентраций непроводящей компоненты, т. е. порог, характеризующий фазовый переход «проводник — изолятор».

К описанному методу самосогласования близок метод расчета, который естественно назвать дифференциальным самосогласованием. Согласно этому методу, впервые развитому Д. Бруггеманом [39], самосогласование проводится при внесении в среду, наделенную искомыми эффективными свойствами, малых порций включений для установления связи между приращениями эффективных параметров и приращением концентрации. Интегрируя полученное таким образом обыкновенное дифференциальное уравнение, находят искомую зависимость эффективных параметров от концентрации. Следует отметить, что процедура дифференциального самосогласования обладает свойством сильного перемешивания и потому непригодна даже для качественной оценки явлений типа фазового перехода «проводник — изолятор».

Известны и другие модификации процедуры самосогласования, например рассмотренные в [12].

Перечисленные методы не носят регулярного характера в том смысле, что успех достигается в результате учета конкретных особенностей задачи и пренебрежения факторами, несущественными в рассматриваемом частном случае. Как правило, упрощающие гипотезы обосновываются на интуитивном уровне и носят лишь качественный характер.

Рассмотрение задачи в полной постановке связано с применением методов теории возмущений, основного аппарата современной теоретической физики. Выбрав соответствующую «невозмущенную» задачу, в принципе можно записать формальное решение

в виде ряда по некоторому параметру — возмущению, трактуемому в настоящее время достаточно широко. Основная проблема заключается в суммировании полученного ряда, осуществить которое полностью, как правило, не удается. Поэтому приходится ограничиваться тем или иным приближением.

Вероятно, впервые метод возмущений для определения эффективных характеристик неоднородной среды применили И. М. Лифшиц и Л. Н. Розенцвейг [19], изучавшие напряженное состояние случайных упругих поликристаллических структур. Оборвав ряд возмущений на члене, учитывающем парные корреляции флуктуаций упругих модулей, они вычислили эффективные модули упругости в так называемом корреляционном приближении. Позже в этом приближении были решены многие задачи по определению эффективных параметров.

Попытки суммирования всего ряда теории возмущений, или по крайней мере ускорения его сходимости, связаны с методом перенормировок, развитым в квантовой теории поля. Здесь уместно отметить работу [28], где изложены результаты Буре, В. И. Татарского и Герценштейна, рассматривавших процесс распространения волн в средах со случайными неоднородностями. Эффективность метода перенормировок возросла с использованием предложенного В. М. Финкельбергом разделения многочастичных взаимодействий на локальные и нелокальные. Фактически это эквивалентно выделению в каждом члене ряда возмущений некоторой его части, ответственной за взаимодействие определенного рода, и последующему суммированию всех членов такого типа. Этот подход, получивший в работах Т. Д. Шермергора [37] и Г. А. Фокина [33] название сингулярного приближения, позволил авторам рассмотреть многие задачи теории упругости микронеоднородных сред, определения эффективной диэлектрической проницаемости неоднородных диэлектриков. Было установлено, что аналогичные результаты можно получить без выписывания ряда возмущений, если отделить сингулярную и формальную производные функции Грина в основном функциональном уравнении. Это приближение, получившее название обобщенного сингулярного приближения в комбинации с модификацией метода перенормировок, позволило установить общность многих приближенных результатов, в частности метода самосогласования, метода изучения «сильно изотропных» сред. Была выяснена связь сингулярного приближения с методами построения вариационных границ для эффективных характеристик.

К описываемым методам близок метод приближенного суммирования ряда возмущений, выписанного для Фурье-амплитуд флуктуирующих полей. Этот подход, использованный Херрингом, развит В. А. Кудиновым и Б. Я. Мойжесом [16].

Уместно отметить, что в близких в идейном отношении задачах распространения волн в средах со случайными неоднородностями развиваются методы суммирования рядов возмущений с помощью диаграммной техники Фейнмана [31].

В некоторых частных случаях известны точные решения задачи определения эффективных параметров систем. В первую очередь это одномерные (слоистые) структуры, для которых продольная эффективная проводимость (вдоль слоев) $\sigma^*_{11} = \langle\sigma\rangle$, а поперечная $\sigma^*_{22} = \langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}$. Замечателен результат, полученный А. М. Дыхне [9]. Им доказано, что если плоская изотропная система, покрытая подобластями различной проводимости σ_1 и σ_2 таким образом, что подобласти в среднем геометрически эквивалентны (отличие только в проводимостях), то эффективная проводимость системы $\sigma^*(p)$, где p — доля областей проводимости σ_1, удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sigma^*(p)\,\sigma^*(1-p) = \sigma_1\sigma_2. \tag{6.13}$$

Отсюда следует, что при $p = 1/2$ эффективная проводимость

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}. \tag{6.14}$$

А. М. Дыхне рассмотрел также случай, когда распределение $\varkappa = \ln\sigma - \langle\ln\sigma\rangle$ является четной функцией $\varkappa$. И в этом случае получено точное значение эффективной проводимости

$$\sigma^* = \exp\langle\ln\sigma\rangle. \tag{6.15}$$

Развитие численных методов и применение современных ЭВМ сделало возможным определение эффективных параметров с помощью прямого математического эксперимента. В этом случае рассматриваются поля достаточно простой структуры, моделируются реализации неоднородного по проводимости поля и для каждой из них решается численно краевая задача. Полученные результаты усредняются и вычисляется эффективная проводимость. Естественно, что такой путь сопряжен с рассмотрением лишь частных задач, весьма трудоемких, однако при достаточно малом по сравнению с размерами области масштабе корреляции дает возможность получить эффективную проводимость сильно неоднородных систем. В последнее время в связи с развитием методов теории протекания в физике твердого тела [38] решен численно целый ряд задач определения эффективной проводимости неоднородных плоских и пространственных решетчатых структур. Эти результаты, кстати, прекрасно коррелированные с теорией самосогласованного поля, частично приводятся в обзорах Эллиотта, Крумхансла, Лиса, Киркпатрика [32].

Специфические интересы теории протекания связаны с изменением свойств неоднородных систем в окрестности точки фазового перехода «проводник — изолятор», изучением топологии проводящих и непроводящих областей — кластеров. Понятия и методы теории протекания важны для изучения фильтрации несмешивающихся жидкостей в окрестности критических насыщенностей, для которых характерно разрушение бесконечного кластера одной из жидких фаз.

Задача о вычислении эффективных характеристик неоднородных сред допускает и вариационную формулировку. В различных задачах физическое содержание вариационного принципа может

быть разным, математические формулировки идентичны. В задачах переноса, в том числе фильтрационного, используется принцип минимального роста энтропии системы или, что то же самое, минимальной диссипации энергии. В задачах теории упругости это принцип минимума потенциальной и дополнительной энергии. В несколько необычной форме записан вариационный принцип, предложенный Л. Хашиным и С. Штрикманом [41], однако доказано, что этот принцип эквивалентен фундаментальным энергетическим принципам в том смысле, что эти принципы взаимно выводимы [37].

Вариационные принципы позволяют поставить задачу об определении границ, внутри которых заключены эффективные характеристики систем определенного класса, иными словами, построить «вилку» для точного значения эффективной характеристики. Очевидно, вилка будет тем уже, чем больше информации о рассматриваемой системе, а точнее о классе систем, к которому она принадлежит, будет использовано при построении границ. Так, если не ограничивать класс рассматриваемых систем, т. е. не использовать никакой дополнительной информации, вариационные границы дают универсальную вилку: эффективная проводимость любой среды заключена между средней гармонической и средней арифметической проводимостями. Эта вилка, по-видимому, впервые была установлена Винером [43].

Поскольку существует физическая система (слоистая структура), для которой универсальные границы реализуются, сузить такую вилку можно только при помощи дополнительной информации о конкретной системе. Например, используя трехточечные корреляционные моменты проводимости, М. Дж. Беран, Миллер [3] строят границы, лежащие внутри универсальной вилки. Значительный интерес представляет собой вилка Хашина — Штрикмана [41] для эффективных проводимостей макроскопически и микроскопически изотропных многофазных систем. Эта вилка привлекательна тем, что в определенных ситуациях она значительно у́же универсальной вилки, однако остается открытым вопрос о возможности ее сужения для случая трех измерений без привлечения дополнительной информации, поскольку не выяснено, существуют ли изотропные пространственные системы, эффективные характеристики которых совпадают с границами Хашина — Штрикмана.

В последнее время интенсивно развиваются исследования, в которых вопрос об определении эффективных характеристик неоднородных сред формулируется в терминах теории усреднения дифференциальных операторов [11]. Приведем пример подобного подхода.

Рассмотрим в ограниченной области D с границей S задачу Дирихле

$$A(u) \equiv \nabla[\sigma(x)\nabla u] = f, \quad x \in D, \tag{6.16}$$

где функция $\sigma(x)$ в зависимости от вида микроструктуры может быть периодической, квазипериодической или случайной, стохастически однородной функцией координат.

Введем малый параметр ε и рассмотрим семейство задач

$$A^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) \equiv \nabla\,|\sigma(\varepsilon^{-1}x)\,\nabla u^{\varepsilon}| = f,\ x \in D,\ u^{\varepsilon}|_S = 0\ . \qquad (6.17)$$

Усреднение семейства операторов (6.17) трактуется как задача построения оператора $A^*(u^*)$.

$$A^*(u^*) \equiv \nabla\,|\sigma^*(x)\,\nabla u^*| = f,\ x \in D,\ u^*|_S = 0, \qquad (6.18)$$

такого, что $u^{\varepsilon} \to u^*$ в норме $L^2(D)$ при $\varepsilon \to 0$ для любой функции $f \in L^2(D)$.

Аналогично ставится задача усреднения для параболических и гиперболических уравнений.

Приведем результаты построения усредненного оператора для случая, когда $\sigma(x)$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ — периодический тензор с периодом 1 [11].

В этом случае

$$\sigma^*_{ii} = \sum_{i=1}^{n} < \sigma_{ii} \frac{\partial N_j(y)}{\partial y_i} > + <\sigma_{ii}>, \qquad (6.19)$$

где символ усреднения $< >$ означает интегрирование по объему единичного куба периодов; $N_s(y)$ — периодические с периодом 1 функции в этом же кубе, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{i} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\sigma_{ii}\ (y)\ \frac{\partial N_s(y)}{\partial y_i}\right] = -\sum_{i} \frac{\partial}{\partial y_i}\,|\sigma_{is}(y)|. \qquad (6.20)$$

Таким образом, определение эффективных проводимостей сведено к решению эллиптических уравнений (6.20) и последующему усреднению по формуле (6.19). Реализация такой процедуры весьма трудоемка, поскольку решить уравнение (6.20), как правило, можно лишь численно, что, в свою очередь, связано с большими трудностями. Отсюда ясно, что действуя таким образом, установить зависимость эффективной проводимости от параметров периодической структуры, неоднородности поля проводимости вряд ли практически возможно. Аналогично и даже еще сложнее обстоит дело при рассмотрении стохастического варианта задачи. При этом следует учесть, что анализ процессов в неоднородных средах далеко не исчерпывается задачей определения эффективных характеристик. Не менее важны всякого рода корреляции полей. Уместно добавить, что точные решения задачи определения эффективных параметров, строго обоснованные теорией усреднения операторов,— все те же случаи одномерных (слоистых) структур и результаты А. М. Дыхне [9], полученные иным путем.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ПОЛЕЙ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Как уже отмечалось, известные приближенные решения не всегда удовлетворительны при сильных флуктуациях поля проводимости. Следует отметить также отсутствие эффективных оценок погреш-

ностей результатов, так же как и практически полное отсутствие точных решений задачи определения эффективной проводимости. Исключением в данном случае, помимо уже упомянутых слоистых структур, является работа А. М. Дыхне [9], в которой для определенных двумерных систем получено точное значение эффективной проводимости, что стало возможным благодаря найденному автором линейному преобразованию системы дифференциальных уравнений, известным образом преобразующему макроскопические характеристики среды. Далее излагаются метод и некоторые результаты [9], примеры возможных обобщений, делается попытка получения приближенных зависимостей для эффективных характеристик [36].

Итак, пусть «поток»-вектор $\vec{v}$ и поле $\vec{h}$ связаны системой соотношений

$$\vec{v} = \sigma\vec{h}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{h} = 0. \tag{6.21}$$

Локальная проводимость является случайным тензором, зависящим от координат x, y. Введем средние по пространству поток и поле

$$\vec{V} = \Omega^{-1}\int_{\Omega}\vec{v}d\omega, \quad \vec{H} = \Omega^{-1}\int_{\Omega}\vec{h}d\omega \tag{6.22}$$

и определим тензор эффективной проводимости системы σ^* из соотношения

$$\vec{V} = \sigma^*\vec{H}. \tag{6.23}$$

При этом характерный линейный масштаб области усреднения Ω, например ее диаметр, должен быть значительно больше масштабов корреляции полей $\vec{v}$ и $\vec{h}$.

Введем в рассмотрение поля $\vec{v}'$ и h' в качестве общих для всего двумерного пространства линейных преобразований полей $\vec{v}$ и $\vec{h}$

$$\vec{v}' = \alpha M_1\vec{h} + \gamma M_2\vec{v}, \quad \vec{h}' = \beta M_3\vec{v} + \delta M_4\vec{h}. \tag{6.24}$$

Здесь α, β, γ, δ — произвольные постоянные; M_i — матрицы поворота на постоянный угол φ_i.

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

Используя уравнения (6.21), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{v}' &= \alpha\cos\varphi_1\operatorname{div}\vec{h} + \gamma\sin\varphi_2\operatorname{rot}_3\vec{v}, \\ \operatorname{rot}\vec{h}' &= \beta\cos\varphi_3\operatorname{rot}_3\vec{v} + \delta\sin\varphi_4\operatorname{div}\vec{h}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Для того чтобы поле $\vec{v}'$ не имело источников, достаточно положить

$$\varphi_1 = \pm \pi/2, \quad \varphi_2 = 0.$$

Аналогично для потенциальности поля $\vec{h}'$ достаточно принять

$$\varphi_3 = \pm \pi/2, \quad \varphi_4 = 0.$$

Поскольку постоянные α, β, γ, δ произвольны, положим для определенности

$$M_1 = M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = M, \quad M_2 = M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \qquad (6.27)$$

Поскольку штрихованные поля являются линейными преобразованиями полей $\vec{v}$ и $\vec{h}$, они также связаны линейно

$$\vec{v}' = \sigma' \vec{h}', \qquad (6.28)$$

где, как легко проверить, тензор σ' определяется зависимостью

$$\sigma' = [\alpha M + \gamma\sigma][\beta M\sigma + \delta E]^{-1}. \qquad (6.29)$$

Вводя средние штрихованные поля $\vec{V}'$ и $\vec{H}'$ в соответствии с (6.22) и учитывая, что они также связаны линейно

$$\vec{V}' = \sigma_* \vec{H}', \qquad (6.30)$$

найдем для неслучайного тензора эффективной проводимости σ_* штрихованной системы

$$\sigma_* = [\alpha M + \gamma\sigma^*][\beta M\sigma^* + \delta E]^{-1}. \qquad (6.31)$$

Таким образом, (6.24) определяет преобразования локальных и эффективных проводимостей исходной и штрихованной систем. Если известен один из тензоров (σ^* либо σ_*), из (6.31) легко определить другой. В некоторых случаях основная и штрихованная системы макроскопически эквивалентны, т. е. $\sigma^* = \sigma_* = \bar{\sigma}$. Тогда (6.31) можно рассматривать как матричное уравнение относительно $\bar{\sigma}$. Именно в таких случаях А. М. Дыхне [9] получил точное решение задачи определения эффективной проводимости.

В соответствии с принципом Онзагера тензор σ симметричен. Пусть σ^1 и σ^2 — его компоненты после приведения к главным осям. Тогда из (6.29) имеем

$$\sigma' = \frac{1}{\delta^2 + \beta^2\sigma^1\sigma^2} \begin{pmatrix} (\gamma\delta + \alpha\beta)\,\sigma^1 & \alpha\delta - \gamma\beta\sigma^1\sigma^2 \\ -\alpha\delta + \gamma\beta\sigma^1\sigma^2 & (\gamma\delta + \alpha\beta)\,\sigma^2 \end{pmatrix}. \qquad (6.32)$$

Поскольку естественно выбрать преобразование таким образом, чтобы σ' также был симметричным тензором, следует положить при переменных по пространству σ^1 и σ^2

$$\delta = \gamma = 0, \qquad (6.33)$$

т. е. (6.32) так же, как и (6.31), принимает вид

$$\sigma' = \frac{\alpha}{\beta\sigma^1\sigma^2}\sigma = \frac{\alpha}{\beta} \begin{pmatrix} (\sigma^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (\sigma^1)^{-1} \end{pmatrix}. \qquad (6.34)$$

Если поле σ изотропно, $\sigma' = \sigma^2 = \sigma$ и преобразование переходит в $\sigma' = \alpha/\beta\sigma$, т. е. является инверсией точек прямой $0 < \sigma < \infty$ относительно центра инверсии $\sqrt{\alpha/\beta}$ — свободного параметра преобразования. Уместно подчеркнуть, что изотропия полей σ и σ' не означает, вообще говоря, изотропии соответствующих им полей σ^* и σ_*. Поэтому в общем случае

$$\sigma_* = \frac{\alpha}{\beta}\begin{pmatrix} (\sigma^{*2})^{-1} & 0 \\ 0 & (\sigma^{*1})^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6.35}$$

Пусть среда состоит из двух компонентов с проводимостями σ_1 и σ_2 и пусть $\alpha/\beta = \sigma_1^2$. Тогда локальное преобразование исходной системы в штрихованную запишется так: $\sigma' = \sigma_1^2/\sigma$. Легко видеть, что при таком преобразовании подобласти, содержащие в исходной среде компоненту σ_1, сохранятся и в среде штрихованной. Подобласти проводимости σ_2 переходят в подобласти проводимости σ_1^2/σ_2. Таким образом, при полном сохранении геометрии исходная и штрихованная среды будут различаться лишь тем, что в среде штрихованной вторая компонента будет иной, чем в среде исходной. Если σ^* — тензор эффективной проводимости исходной среды при фиксированной p-концентрации первой компоненты следует считать, что

$$\sigma^* = \sigma^*(P, \sigma_1, \sigma_2).$$

Тогда σ_1^* — тензор эффективной проводимости штрихованной среды запишется так

$$\sigma_1^* = \sigma^*(P, \sigma_1, \sigma_1^2/\sigma_2).$$

Отсюда из формулы (6.35) следуют соотношения для компонентов

$$\sigma_{11}^*(P, \sigma_1, \sigma_2)\,\sigma_{22}^*(P, \sigma_1, \sigma_1^2/\sigma_2) = \sigma_1^2,$$
$$\sigma_{22}^*(P, \sigma_1, \sigma_2)\,\sigma_{11}^*(P, \sigma_1, \sigma_1^2/\sigma_2) = \sigma_1^2. \tag{6.36}$$

Проверим соотношения (6.36) на простом примере слоистой среды. Считая σ_{11}^* продольной, а σ_{22}^* поперечной компонентами тензора проводимости, запишем

$$\sigma_{11}^*(P, \sigma_1, \sigma_2) = \langle\sigma\rangle = P\sigma_1 + (1-P)\sigma_2,$$
$$\sigma_{22}^*(P, \sigma_1, \sigma_2) = \langle\sigma^{-1}\rangle^{-1} = \sigma_1\sigma_2[P\sigma_2 + (1-P)\sigma_1].$$

Подсчитав $\sigma_{22}^*(P, \sigma_1, \sigma_1^2/\sigma_2) = \langle\sigma\rangle^{-1}\sigma_1^2$ и $\sigma_{11}^*(P, \sigma_1, \sigma_1^2/\sigma_2) = \langle\sigma^{-1}\rangle\sigma_1^2$, убеждаемся, что равенства (6.36) обращаются в тождества.

Интересен случай $\sigma_2 \to 0$, т. е. исходной области с непроводящими подобластями. Легко видеть, что в штрихованной системе эти подобласти превратятся в идеальный проводник с бесконечной проводимостью. Соотношения (6.36) примут вид

$$\sigma_{11}^*(P, \sigma_1, 0)\,\sigma_{22}^*(P, \sigma_1, \infty) = \sigma_1^2, \tag{6.37}$$
$$\sigma_{22}^*(P, \sigma_1, 0)\,\sigma_{11}^*(P, \sigma_1, \infty) = \sigma_1^2.$$

Если рассматриваемая система изотропна, оба равенства в (6.37) совпадают, и можно записать $\bar{\sigma}^* = \sigma^*/\sigma_1$.

$$\bar{\sigma}^*(P,\ 1,\ 0)\,\bar{\sigma}^*(P,\ 1,\ \infty) = 1. \tag{6.38}$$

Таким образом, считая проводимость σ_1 единичной, приходим к выводу, что проводимость дополнительной системы, т. е. системы, в которой изолятор заменен идеальным проводником или, наоборот, идеальный проводник заменен изолятором, эквивалентна сопротивлению исходной среды.

А. М. Дыхне рассмотрел случай, когда плотность распределения величины $x = \ln\sigma - \langle\ln\sigma\rangle$ является четной функцией x. Тогда при $\alpha/\beta = \exp(2\langle\ln\sigma\rangle)$ логарифм штрихованного поля распределен аналогично и, следовательно, макроскопические характеристики исходного и штрихованного поля идентичны. Поэтому

$$\sigma^* = \sqrt{\alpha/\beta} = \exp\langle\ln\sigma\rangle. \tag{6.39}$$

Формулу (6.39) можно преобразовать и придать ей вид, подсказывающий возможные пути обобщения. Итак, поскольку

$$\ln\sigma = x + \langle\ln\sigma\rangle, \tag{6.40}$$

имеем

$$\sigma = \exp[x + \langle\ln\sigma\rangle]. \tag{6.41}$$

Отсюда

$$\langle\sigma\rangle = e^{\langle\ln\sigma\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x)\,dx, \tag{6.42}$$

$$\langle\sigma^{-1}\rangle = e^{-\langle\ln\sigma\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx. \tag{6.43}$$

Но, поскольку $f(x)$ — четная функция, последнюю формулу можно переписать в виде

$$\langle\sigma^{-1}\rangle = e^{-\langle\ln\sigma\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x)\,dx. \tag{6.44}$$

Сравнив (6.42) с (6.44), получим

$$\exp\langle\ln\sigma\rangle = [\langle\sigma\rangle\langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}]^{1/2} \tag{6.45}$$

и, следовательно,

$$\sigma^* = [\langle\sigma\rangle\langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}]^{1/2}. \tag{6.46}$$

Если распределение x — гауссово, то

$$\sigma^* = \langle\sigma\rangle\exp(-\Delta^2/2),\ \Delta^2 = \langle x^2\rangle. \tag{6.47}$$

Для гауссового распределения $\ln\sigma$ можно получить иное выражение для $\langle\ln\sigma\rangle$

$$\langle\ln\sigma\rangle = \frac{1}{2}\ln\frac{\langle\sigma\rangle^2}{1+\zeta^2},\quad \zeta^2 = \frac{\langle(\sigma - \langle\sigma\rangle)^2\rangle}{\langle\sigma\rangle^2}$$

и, следовательно, из (6.39) вытекает

$$\sigma^* = <\sigma> (1 + \zeta^2)^{-1/2}. \tag{6.48}$$

Это точные соотношения для двумерного поля, логарифм проводимости которого нормален.

Разложив $1/\sqrt{1+\zeta^2}$ в ряд, ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$\sigma^* = <\sigma> (1 + \zeta^2/2)^{-1}. \tag{6.49}$$

При малых ζ последней формуле эквивалентна зависимость

$$\sigma^* = <\sigma> (1 - \zeta^2/2). \tag{6.50}$$

Если поле логнормально, то в случае одномерного поля имеем

$$\sigma^* = <\sigma^{-1}>^{-1} = \exp\{a - \Delta^2/2\}, \tag{6.51}$$

где

$$a = <\ln\sigma> = \frac{1}{2}\ln\frac{<\sigma>^2}{1+\zeta^2}, \quad \Delta^2 = \ln(1+\zeta^2).$$

Отсюда

$$\sigma^* = \exp\{\ln <\sigma> - \ln(1+\zeta^2)\} \tag{6.52}$$

или

$$\sigma^* = <\sigma> (1 + \zeta^2)^{-1}.$$

Применение метода возмущений к исходной задаче (см. четвертый раздел, гл. 6) дает

$$\sigma^* = <\sigma> (1 + \zeta^2/n)^{-1}, \tag{6.53}$$

где n — произвольная размерность пространства. При этом логнормальность поля проводимости явно не предполагается. Сопоставление формул (6.48), (6.52), (6.53) позволяет предполагать, что эффективная проводимость для произвольного n, включая $n = 3$, имеет вид

$$\sigma^* = <\sigma> / \sqrt[n]{1+\zeta^2}, \tag{6.54}$$

или в иной форме

$$\sigma^* = <\sigma> \exp(-\Delta^2/n). \tag{6.55}$$

Если $\ln\sigma$ распределен по нормальному закону, последние формулы преобразуются к виду

$$\sigma^* = <\sigma>^{2/3} <\sigma^{-1}>^{-1/3}. \tag{6.56}$$

Таким образом, формулы (6.46), (6.51), (6.56) можно объединить в одну

$$\sigma^* = \{<\sigma>^{1-\frac{1}{n}} <\sigma^{-1}>^{-1}\}^{\frac{1}{n}}. \tag{6.57}$$

При $n = 1$ эта формула является точной при любом распределении, при $n = 2$ она точна, если распределение $\varkappa$ четное и, наконец, при $n = 3$ можно ожидать, что формула достаточно точна при логнормальном распределении σ.

Таким образом, с ростом размерности пространства растет вклад средней проводимости и убывает вклад гармоничества проводимости в эффективную проводимость.

Вернемся к рассмотрению двумерных полей. Пусть поле σ изотропно и двухкомпонентно, т. е. σ в различных точках пространства принимает значения σ_1 или σ_2 соответственно с вероятностями P и $1-P$. Если положить $\alpha/\beta = \sigma_1\sigma_2$, то штрихованное поле будет отличаться от исходного тем, что в подобластях постоянства параметров произойдет замена $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$. При этом, очевидно, $P \rightleftarrows 1-P$, т. е. концентрация первой компоненты станет равной $1-P$. Если исходная среда макроскопически изотропна, то и штрихованная также будет изотропный. Легко понять, однако, что зависимость эффективной проводимости от концентрации одной из компонент для основной и штрихованной систем могут быть различными. Например, если основная система матричного типа, то справедливость такого утверждения очевидна. Учитывая это обстоятельство, для изотропных систем матричное равенство (6.38) перепишем в виде функционального уравнения

$$\sigma_1^*(P)\,\sigma_2^*(1-P) = \sigma_1\sigma_2, \tag{6.58}$$

при этом под σ_1^* понимается эффективная проводимость исходной системы, под σ_2^* — эффективная проводимость штрихованной системы.

Если исходная система такова, что указанная транспозиция не меняет эффективной проводимости системы, и, следовательно,

$$\sigma_1^*(P) = \sigma_2^*(P) = \sigma^*(P),$$

из (6.58) имеем

$$\sigma^*(P)\,\sigma^*(1-P) = \sigma_1\sigma_2. \tag{6.59}$$

Пусть теперь $P = 1/2$. Тогда из последнего уравнения имеем точный результат

$$\sigma^*(1/2) = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}. \tag{6.60}$$

Таким образом, существенная симметрия случайного поля дает возможность получить точное соотношение (6.60). Доказано, что это равенство имеет место и для регулярных систем типа «шахматной доски», белые и черные поля которой имеют проводимости σ_1 и σ_2.

Несложные рассуждения показывают, что при $\sigma_1 = 0$ и $P \geqslant 1/2$ эффективная проводимость $\sigma^* = 0$, т. е. концентрация $P = 1/2$ является критической.

Легко проверить, что оба случая, для которых удается получить решение задачи об эффективной проводимости, фактически различаются только значением постоянной $\theta = \sqrt{\alpha/\beta}$, для которой распределения σ/θ и θ/σ идентичны. Ими исчерпываются известные точные решения задачи об эффективных параметрах. Кажется заманчивым использовать соотношение (6.59) для получения приближенных решений, рассматривая его как функциональное уравнение

Далее получены довольно простые соотношения и дается сравнение расчетных показателей с результатами математического эксперимента по прямому определению эффективных параметров численными методами.

Итак, рассмотрим двухкомпонентную гетерогенную среду и пусть для определенности $\sigma_2 > \sigma_1 \neq 0$. Введем новую переменную $u = P - 1/2$. Поскольку $P = 1/2$ и $u = 0$ — критическая концентрация, можно без ограничения общности считать, что $\sigma^*(u) = \sigma_1^*$ при $u < 0$ и $\sigma^*(u) = \sigma_2^*(u)$ при $u > 0$, где σ_i — различные, вообще говоря, функции. Будем предполагать, что они аналитичны, т. е.

$$\sigma_1^*(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots, \quad u \leqslant 0, \tag{6.61}$$

$$\sigma_2^*(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots, \quad u \geqslant 0.$$

Естественно, при $u = 0$ функции $\sigma_1^*(0) = \sigma_2^*(0) = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ и, следовательно, $a_0 = b_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$. Из соотношения (6.59) вытекает, при $u \geqslant 0$

$$\sigma_1^*(-u)\,\sigma_2^*(u) = \sigma_1 \sigma_2 \tag{6.62}$$

или

$$(a_0 - a_1 u + a_2 u^2 - \ldots)(b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots) = \sigma_1 \sigma_2, \tag{6.63}$$

что с учетом значений a_0 и b_0 даст

$$u(a_0 b_1 - a_1 b_0) + u^2 (a_0 b_2 - a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots = 0. \tag{6.64}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при u^n, получим бесконечную систему уравнений

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0, \quad a_0 b_2 - a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0, \quad \ldots \tag{6.65}$$

Очевидно, число неизвестных превышает число уравнений, как и должно быть, поскольку соотношение (6.62) содержит две неизвестные функции. Однако, если в разложениях ограничиться небольшим количеством членов и, кроме того, привлечь независимо полученную информацию об этих функциях, задачу определения σ_i^* можно сделать разрешимой единственным образом. В качестве такой информации можно использовать соотношения $\sigma_2^*(1/2) = \sigma_2$, $\sigma_1^*(1/2) = \sigma_1$, а также λ_i — значения производных $d\sigma_i^*/du$ в точках $u = \pm 1/2$, которые можно вычислить независимо, например методом возмущений в приближении малой концентрации и т. д. Стоит подчеркнуть, что задание $\sigma_i^*(u)$ сразу в двух точках не является излишним, поскольку соотношение (6.59) при урезании бесконечной системы (6.65) будет выполнено лишь приближенно.

Пусть σ_i^* аппроксимируется кубическими параболами. При $u > 0$

$$\sigma_1^*(u) = a_0 - a_1 u + a_2 u^2 - a_3 u^3, \tag{6.66}$$

$$\sigma_2^*(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3.$$

Используя найденные ранее значения a_0, b_0 и условия при $u = \pm 1/2$, получим уравнения

$$-\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{8}a_3 = \sigma_1 - \sqrt{\sigma_1\sigma_2},$$
$$\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_3 = \sigma_2 - \sqrt{\sigma_1\sigma_2}, \qquad (6.67)$$
$$-a_1 + a_2 - \frac{3}{4}a_3 = \lambda_1,$$
$$b_1 + b_2 + \frac{3}{4}b_3 = \lambda_2.$$

Система состоит из четырех уравнений с шестью неизвестными. Для замыкания системы используем два соотношения из (6.65)

$$\sqrt{\sigma_1\sigma_2}(b_1 - a_1) = 0, \qquad (6.68)$$
$$\sqrt{\sigma_1\sigma_2}(b_2 + a_2) - a_1 b_1 = 0.$$

Поскольку мы предположили аналитичность $\sigma_i^*(u)$, использование двух уравнений из (6.65) обеспечивает выполнение равенства (6.62) с погрешностью $O(u^3)$. Отметим, что из первого уравнения (6.68) при $\sigma_1 \neq 0$ следует $a_1 = b_1$, т. е. в точке $u = 0$ функции σ_i^* не только равны, но и гладко «склеены».

Решив уравнения (6.67) и (6.68), найдем a_i, b_i, а с ними и искомые зависимости.

Для простоты рассмотрим случай, когда σ_1^* аппроксимируется линейной зависимостью. Тогда $a_2 = a_3 = 0$ и из первого уравнения (6.67) следует $a_1 = 2\sqrt{\sigma_1\sigma_2} - \sigma_1$. Третье уравнение из (6.67) следует исключить из рассмотрения, а из системы (6.68) исключить второе. Решив оставшиеся уравнения, получим

$$a_1 = b_1 = 2(\sqrt{\sigma_1\sigma_2} - \sigma_1); \quad b_2 = 12(\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1}) - 2\lambda +$$
$$+ 4(\sqrt{\sigma_1\sigma_2} - \sigma_1); \quad b_3 = 4\lambda - 16(\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1})^2 - 8(\sqrt{\sigma_1\sigma_2} - \sigma_1).$$

Для вычислений необходимо задать $\lambda(\sigma_1, \sigma_2)$. Для этого используем решение задачи об эффективной проводимости среды проводимости σ_2, в которой имеются включения проводимости σ_1, причем концентрация включений мала. Для включений круговой формы, следуя [17], из (6.10) можно получить

$$\sigma^* = \sigma_2 + P\frac{2\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad (6.69)$$

и, следовательно,

$$\lambda = \frac{2\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2}. \qquad (6.70)$$

Результаты расчетов эффективной проводимости приведены в табл. 14, где представлены функции $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i^*/\sigma_2$ в зависимости от u и параметра $\tilde{\sigma} = \sigma_1/\sigma_2$. Там же для каждого u приводится величина

$\bar{\sigma}_1^* \cdot \bar{\sigma}_2^*$, отклонение которой от $\bar{\sigma}$ характеризует погрешность основного функционального уравнения. Анализ таблицы показывает, что при достаточно больших $\bar{\sigma}$ эта погрешность незначительна.

ТАБЛИЦА 14

Функция	u										
	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
					$\bar{\sigma} = 0{,}01$						
$\bar{\sigma}_1^*$	0,1000	0,0910	0,0820	0,0730	0,0640	0,0550	0,0460	0,0370	0,0280	0,0190	0,0100
$\bar{\sigma}_2^*$	0,1000	0,1237	0,1738	0,2459	0,3357	0,4387	0,5507	0,6672	0,7838	0,8962	1,0000
$\bar{\sigma}_1^* \bar{\sigma}_2^*$	0,0100	0,0113	0,0142	0,0179	0,0215	0,0241	0,0253	0,0247	0,0219	0,0170	0,0100
					$\bar{\sigma} = 0{,}1$						
$\bar{\sigma}_1^*$	0,3162	0,2946	0,2730	0,2514	0,2297	0,2081	0,1865	0,1649	0,1432	0,1216	0,1000
$\bar{\sigma}_2^*$	0,3162	0,3455	0,3888	0,4442	0,5095	0,5829	0,6622	0,7456	0,8311	0,9165	1,0000
$\bar{\sigma}_1^* \bar{\sigma}_2^*$	0,1000	0,1018	0,1062	0,1116	0,1170	0,1213	0,1235	0,1229	0,1190	0,1115	0,1000
					$\bar{\sigma} = 0{,}3$						
$\bar{\sigma}_1^*$	0,5477	0,5230	0,4982	0,4734	0,4486	0,4239	0,3991	0,3743	0,3495	0,3248	0,3000
$\bar{\sigma}_2^*$	0,5477	0,5756	0,6092	0,6479	0,6909	0,7375	0,7870	0,8383	0,8920	0,9460	1,0000
$\bar{\sigma}_1^* \bar{\sigma}_2^*$	0,3000	0,3010	0,3035	0,3067	0,3100	0,3126	0,3141	0,3140	0,3118	0,3072	0,3000

Результаты расчетов эффективной проводимости сравнивались с результатами численного моделирования неоднородной среды. С этой целью в квадрате, покрытом разностной сеткой 40×40, случайным образом генерировались реализации неоднородного поля, проводимость которого равна единице, с элементарными включениями проводимости σ, концентрация которых равна P. Значения проводимости в соседних ячейках независимы. Решая соответствующую краевую разностную задачу для генерированного поля, вычисляли эффективную проводимость. Этот процесс повторялся несколько раз. Результаты расчетов отмечены на рис. 20, 21 крестиками. Кривая *2* получена при расчете по формулам (6.66). Учитывая некоторое различие в постановке задач (дискретное и непрерывное поле, конечная и бесконечная области, различие в форме включений и т. д.), результаты сопоставления следует считать удовлетворительными, тем более для случая $\bar{\sigma} = 0{,}25$. Здесь же на рисунках приведены $\langle\sigma\rangle$, $\langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}$ и их полусумма в зависимости от $(1-P)$. При этом в случае $\bar{\sigma} = 0{,}25$

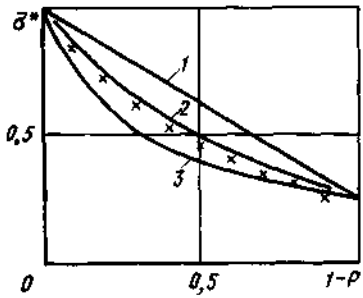


Рис. 20. Зависимость эффективной проводимости $\bar{\sigma}^*$ от концентрации низкопроводящей компоненты $(1-P)$ при $\bar{\sigma}=0{,}25$.

1 — $\langle\sigma\rangle$; *2* — расчет по (6.66); *3* — $\langle\bar{\sigma}^{-1}\rangle^{-1}$

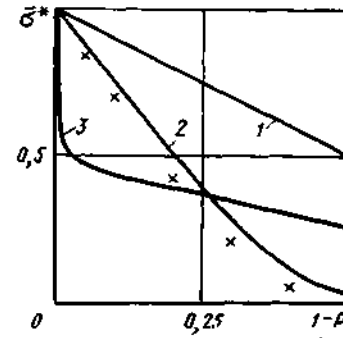


Рис. 21. Зависимость эффективной проводимости $\bar{\sigma}^*$ от концентрации низкопроводящей компоненты $(1-P)$ при $\bar{\sigma}=0{,}001$.

1 — $\langle\sigma\rangle$; *2* — расчет по (6.66); *3* — $[\langle\sigma\rangle+\langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}]/2$

не нанесена кривая $[\langle\sigma\rangle+\langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}]/2$, поскольку она практически совпала с кривой *2*, полученной в настоящей работе, а при $\bar{\sigma}=0{,}001$ не нанесена кривая $\langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}$, поскольку она почти во всем интервале близка к оси абсцисс.

Можно видеть, что оценки эффективной проводимости с помощью средних арифметических, гармонических или их полусуммы приемлемы лишь для достаточно слабой неоднородности.

Переходя к анализу анизотропных полей, запишем соотношения (6.34) и (6.35) в виде

$$\sigma' = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\sigma}{\det\sigma}, \tag{6.71}$$

$$\sigma_* = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\sigma}{\det\sigma^*}, \tag{6.72}$$

где $\det\sigma$ и $\det\sigma^*$ означает определитель тензоров σ и σ^*.

Если существует положительная константа α/β, для которой локально-анизотропные поля σ и σ' эквивалентны по статистическим распределениям, то эффективные проводимости исходной и штрихованной систем тождественны, из (6.72) имеем точное равенство

$$\det\sigma_* = \alpha/\beta. \tag{6.73}$$

Если же эффективные проводимости изотропны, то точно определяется

$$\sigma_* = \sqrt{\alpha/\beta}. \tag{6.74}$$

Перейдем к рассмотрению конкретных систем.

1. Пусть плоская система содержит однородные включения двух типов, тензоры проводимости которых σ_1 и $\sigma_2 = n\sigma_1$, где n — произвольное положительное число.

Выбрав $\alpha/\beta = n \det \sigma_1$, найдем, что в исходной и штрихованной системах проводимости во включениях поменялись местами. Соответственно изменились и концентрации включений. Если концентрации одинаковы ($P = 1/2$) и система такова, что эффективные проводимости исходной и штрихованной систем совпадают, то из (6.73) следует

$$\det \sigma_* = n \det \sigma_1, \tag{6.75}$$

или иначе

$$\det \sigma_* = (\det \sigma_1 \det \sigma_2)^{1/2}. \tag{6.76}$$

Если $P \neq 1/2$, в штрихованной системе доля проводимости σ_1 будет равна $(1-P)$, и для систем с геометрией включений, независимой от их проводимости, из (6.72) получим

$$\sigma_* (1-P) \det \sigma_* (P) = \sigma_* (P) (\det \sigma_1 \det \sigma_2)^{1/2}. \tag{6.77}$$

Если включения изотропны, то $\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1} = \sigma_1$, $n\sigma_1 = \sigma_2$, и для макроизотропных систем из (6.76) и (6.77) следуют формулы (6.58), (6.60).

К рассмотренным примерам близок следующий случай. Пусть в однородной анизотропной плоской системе с главными проводимостями $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\sigma}_y$ имеются включения двух типов. Главные проводимости первого σ_x и σ_y, второго $\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y/\sigma_y$ и $\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y/\sigma_x$. Объемные доли включений одинаковы, а их расположение статистически эквивалентно. Приняв $\alpha/\beta = \bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y$, получим из (6.71), что в штрихованной системе по сравнению с исходной проводимости во включениях поменялись местами, матрица осталась неизменной. Очевидно, эффективные проводимости исходной и штрихованной систем одинаковы и из (6.72) вытекает

$$\det \sigma_* = \bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y. \tag{6.78}$$

Если матрица изотропна $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}$, включения изотропны и система в целом изотропна, из (6.78) имеем

$$\sigma_* = \bar{\sigma}. \tag{6.79}$$

Таким образом, внесение в однородную плоскую систему произвольных и равных долей геометрически эквивалентных включений указанной структуры не меняет ее эффективной проводимости σ_* в случае макроизотропной системы и не меняет $\det \sigma_*$ в общем случае. В частности, при $\sigma_x = \sigma_y = 0$ из (6.78) и (6.79) следует, что непроводящие и идеально проводящие включения вносят в $\det \sigma_*$ и в σ_* взаимно компенсирующиеся вклады.

Если $P_2 \neq P_3$, то из (6.71) и (6.72) при сделанных предположениях о геометрии включений следует

$$\sigma_* (P_3,\ P_2) \det \sigma_* (P_2,\ P_3) = \sigma_* (P_2,\ P_3)\, \bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y \tag{6.80}$$

и если матрица, включения и система в целом изотропны

$$\sigma_* (P_2,\ P_3)\, \sigma_* (P_3,\ P_2) = \bar{\sigma}^2. \tag{6.81}$$

2. Пусть плоскость заполнена включениями, для тензоров локальных проводимостей которых σ_i выполнено условие

$$\det \sigma_i = c = \text{const}. \tag{6.82}$$

Тогда при задании $\alpha/\beta = c$ из (6.71) следует $\sigma' = \sigma$, т. е. штрихованная система тождественна исходной. Поэтому из (6.73) имеем

$$\det \sigma_* = c \tag{6.83}$$

и, если эффективная проводимость изотропна, из (6.83) вытекает

$$\sigma_* = \sqrt{c}. \tag{6.84}$$

В частности, из (6.84) следует формула А. И. Дыхне [9] для эффективной проводимости двумерного поликристалла, состоящего из хаотически ориентированных анизотропных кристаллитов.

Очевидно, соотношения (6.83) и (6.84) сохраняют свой смысл и для непрерывных сред, удовлетворяющих условию $\det \sigma = c$. Такие среды легко «сконструировать». В самом деле, положив $\sigma_x(\vec{r}) = \sqrt{c}\, f(\vec{r})$, где $f(\vec{r})$ — произвольное неотрицательное стохастически однородное случайное поле, а $\sigma_y(\vec{r}) = \sqrt{c} f^{-1}(\vec{r})$, получим среду с искомыми свойствами.

3. Рассмотрим плоское случайное поле, локальный тензор проводимости которого является непрерывной функцией координат. Пусть главные оси локального тензора проводимости не зависят от координат и совпадают с осями x и y. Пусть также компоненты тензора проводимости $\sigma(\vec{r})$ — скалярные случайные поля $\sigma_x(\vec{r})$ и $\sigma_y(\vec{r})$ имеют одинаковые многоточечные функции распределения. Выбрав $\alpha/\beta = \exp 2 < \ln \sigma_x > = \exp 2 < \ln \sigma_y >$, найдем из (6.71), что средние значения логарифмов компонент тензоров σ и σ' одинаковы, а вектору

$$\vec{x} = (\ln \sigma_x - < \ln \sigma_x >, \quad \ln \sigma_y - < \ln \sigma_y >) \tag{6.85}$$

в случае штрихованного поля соответствует вектор

$$\vec{x}' = (< \ln \sigma_y > - \ln \sigma_y, \quad < \ln \sigma_x > - \ln \sigma_x). \tag{6.86}$$

Если предположить, что случайная структура такова, что многоточечная функция распределения поля $\vec{x}$ является четной функцией $\vec{x}$, то из тождественности распределений σ_x и σ_y следует, что векторные поля $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ распределены одинаково и, следовательно, штрихованное поле имеет ту же эффективную проводимость, что исходное. Поэтому

$$\det \sigma_* = \exp 2 < \ln \sigma_x > = \exp 2 < \ln \sigma_y >. \tag{6.87}$$

Если поля σ_x и σ_y некоррелированы, эффективный тензор σ_* изотропен и

$$\sigma_* = \exp < \ln \sigma_x > = \exp < \ln \sigma_y >. \tag{6.88}$$

Точно так же будет и при полной корреляции полей $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, т. е. изотропии локального поля. Из (6.88) следует формула (6.39).

Заканчивая рассмотрение задач, для которых удается получить точное решение, остановимся на системе, распределенной по закону Коши

$$f(\sigma) = 2\alpha/\pi\,(\sigma^2 + \alpha^2),\ \sigma > 0,\ \alpha > 0. \tag{6.89}$$

Очевидно, такая система обладает весьма сильной неоднородностью — все моменты σ неограничены, коэффициент вариации проводимости бесконечен и потому любые приближенные методы, основанные на разложениях по моментам поля проводимости, неприменимы.

Легко проверить, что случайная величина $\varkappa = \ln\sigma - \langle\ln\sigma\rangle$ распределена по закону

$$g(\varkappa) = (\pi \operatorname{ch}\varkappa)^{-1} \tag{6.90}$$

и, следовательно, $g(\varkappa)$ — четная функция $\varkappa$. Поэтому точное значение эффективной проводимости составит

$$\sigma^* = \exp\langle\ln\sigma\rangle = \alpha. \tag{6.91}$$

ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ДЛЯ СРЕД С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим двухфазную среду, структуру которой можно описать так: в неограниченной однородной среде проводимости σ_2 имеются включения проводимости σ_1. Полагая, что включения распределены в пространстве случайно и в среднем равномерно, займемся задачей о вычислении эффективной проводимости среды в целом. Итак, выберем в пространстве некоторый объем W, содержащий достаточно много включений и, вводя средние по объему поток и поле

$$\vec{V} = \frac{1}{W}\int_W \vec{v}\,dW, \quad \vec{H} = \frac{1}{W}\int_W \vec{h}\,dW, \tag{6.92}$$

определим эффективную проводимость из соотношения

$$\vec{V} = \sigma^*\vec{H}. \tag{6.93}$$

Рассмотрим выражение

$$\vec{V} = \frac{1}{W}\int_W \vec{v}\,dW = \frac{\sigma_1}{W}\int_{W_1} \vec{h}\,dW + \frac{\sigma_2}{W}\int_{W_2} \vec{h}\,dW, \tag{6.94}$$

где W_i — объем, занятый i-й фазой.

Следуя Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу [17], будем считать, что включения в среде распределены таким образом, что можно пренебречь их взаимным влиянием при вычислении поля $\vec{h}$ внутри включений. Иными словами, для определения поля внутри включения можно рассмотреть задачу о единственном изолированном включении проводимости σ_1, расположенном в неограниченной среде проводимости σ_2. Если предположить дополнительно, что это вклю-

чение имеет форму эллипсоида, то, как известно [17], поле внутри включения однородно и выражается через поле на бесконечности $\vec{H}$ следующим образом:

$$\vec{h} = \zeta \vec{H}, \tag{6.95}$$

где тензор ζ зависит от σ_1, σ_2 и параметров эллипсоида. Так, если a_1, a_2, a_3 — полуоси эллипсоида — включения, а координатные оси x_1, x_2, x_3 — главные оси тензоров σ_1 и σ_2, то

$$\zeta_{ll} = \frac{\sigma_2^l}{\sigma_0^l - n_l(\sigma_2^l - \sigma_1^l)}, \quad \zeta_{lm} = 0, \quad l \neq m, \tag{6.96}$$

$$n_l = \frac{a_1' a_2' a_3'}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + a_l'^2) R_s}, \quad R_s = \sqrt{(s + a_1'^2)(s + a_2'^2)(s + a_3'^2)},$$

$$a_l' = a_l \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_2^l}},$$

где σ_0 — произвольный параметр, величина которого не влияет на коэффициенты n_l.

Как известно, коэффициенты n_l можно выразить через эллиптические интегралы, а в том случае, если исходные включения — эллипсоиды вращения или бесконечные эллиптические цилиндры — через элементарные функции. Кроме того, при любых параметрах $\sum_l n_l = 1$.

Пусть, например, $a_1' = a_2' \leqslant a_3'$, т. е. в преобразованной (штрихованной) системе координат включение — вытянутый эллипсоид вращения. Тогда

$$n_3 = \frac{1 - l^2}{2l^3}\left(\ln\frac{1+l}{1-l} - 2l\right), \quad n_1 = n_2 = \frac{1}{2}(1 - n_3),$$

$$l = \sqrt{1 - a_1'^2/a_3'^2}. \tag{6.97}$$

Если $a_1' = a_2' \geqslant a_3'$, т. е. преобразованное включение — сплюснутый эллипсоид вращения,

$$n_3 = \frac{1 + l^2}{l^3}(l - \operatorname{arctg} l), \quad n_1 = n_2 = \frac{1}{2}(1 - n_3), \quad l = \sqrt{\frac{a_1'^2}{a_3'^2} - 1}. \tag{6.98}$$

Графики зависимости $n_3 = n_3(a_1'/a_3')$ для вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения представлены на рис. 22, 23. Если же $a_3 = \infty$, т. е. преобразованное включение — неограниченный эллиптический цилиндр, то в соответствии с (6.96)

$$n_1 = a_2'/(a_1' + a_2'), \quad n_2 = a_1'/(a_1' + a_2'), \quad n_3 = 0. \tag{6.99}$$

Возвращаясь в рассматриваемом приближении к вычислению эффективных параметров, учтем постоянство $\vec{h}$ в области W_1. Тогда, считая область W достаточно большой и полагая, что $W_1/W \to P$, получим из (6.94)

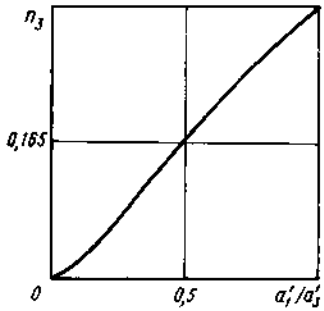


Рис. 22. Зависимость коэффициента деполяризации n_3 вытянутого эллипсоида вращения от соотношения осей $a_1'/a_3' < 1$

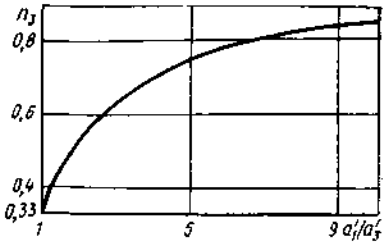


Рис. 23. Зависимость коэффициента деполяризации n_3 сплюснутого эллипсоида вращения от соотношения осей $a_1'/a_3' > 1$

$$\vec{V} = P_1\sigma_1\zeta\vec{H} + P_2\sigma_2\vec{H}_2, \tag{6.100}$$

где H_2 — среднее поле области вне включений

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{W_2}\int_{W_2}\vec{h}dW.$$

Определив H_2 из очевидного равенства

$$\vec{H} = P_1\zeta\vec{H} + P_2\vec{H}_2 \tag{6.101}$$

и подставив в (6.100), найдем

$$\vec{V} = [\sigma_2 + P_1(\sigma_1 - \sigma_2)\zeta]\vec{H}, \tag{6.102}$$

и, следовательно, тензор эффективной проводимости имеет вид

$$\sigma^* = \sigma_2 + P_1(\sigma_1 - \sigma_2)\zeta. \tag{6.103}$$

Пусть среда и включения изотропны, включения имеют форму сферы. Тогда $n_1 = 1/3$, $\zeta = 3\sigma_2(2\sigma_2 + \sigma_1)^{-1}$ и эффективная проводимость макроизотропной системы

$$\sigma^* = \sigma_2 + P_1\frac{3\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma_2 + \sigma_1}. \tag{6.104}$$

Эта формула впервые была получена Максвеллом. Если включения, одинаково ориентированные в направлении третьей оси, — бесконечные круговые цилиндры, из (6.99) следует $n_3 = 0$, $n_1 = n_2 = 1/2$. Кроме того, $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 2\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1}$, $\zeta_{33} = 1$ и, следовательно, тензор эффективной проводимости макроскопической анизотропной системы имеет вид

$$\sigma_{11}^* = \sigma_{22}^* = \sigma_2 + P_1\frac{2\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \sigma_{33} = P_2\sigma_2 + P_1\sigma_1. \tag{6.105}$$

Отметим, что формула (6.103), как и ее следствия (6.104) и (6.105), применима при сильно различающихся σ_1 и σ_2, но при этом должна быть достаточно малой концентрация включений P. Линей-

ная зависимость эффективной проводимости от P, точная асимптотически при малых P, при достаточно больших P и $\sigma_1 \neq 0$ приводит к физически неприемлемым результатам. Исключение — предельный случай слоистой структуры, для которой формула (6.103) является точной.

Рассмотрим подробнее случай, когда проводимость включений σ_1 существенно отличается от проводимости σ_2. В предельной ситуации $\sigma_1 \ll \sigma_2$ имеем для пространственной и плоской изотропных структур соответственно

$$\sigma^* = \sigma_2 \left(1 - \frac{3}{2} P_1\right),$$

$$\sigma^* = \sigma_2 (1 - 2P_1). \tag{6.106}$$

Естественно, что первую формулу можно использовать при $P_1 \ll 2/3$, а вторую — при $P \ll 1/2$. Легко видеть, что в соответствии с этими формулами $P_1 = 2/3$ и $P_1 = 1/2$ являются критическими концентрациями, при которых соответствующие системы перестают быть проводящими. Заметим, что $P = 1/2$ — точное значение критической концентрации для изотропных двумерных систем. Как показывают сопоставления формул с расчетами модельных систем [32], указанные приближения практически удовлетворительны в широком диапазоне изменения P_1. Линейность обычно нарушается лишь в узкой области вблизи критической концентрации.

В случае $\sigma_1 \gg \sigma_2$ формулы (6.104), (6.105) соответственно принимают вид

$$\sigma^* = \sigma_2 (1 + 3P_1),$$

$$\sigma^* = \sigma_2 (1 + 2P_1). \tag{6.107}$$

Легко понять, что такие приближения годятся лишь в узкой области вблизи $P_1 = 0$, поскольку не описывают быстрого возрастания проводимости системы с ростом P_1 вплоть до ее «пробоя», т. е. реализации бесконечной проводимости всей системы при отличной от единицы концентрации высокопроводящих включений.

Вывод формул (6.104) и (6.105) близок к методу Максвелла. Приведем вывод формул Максвелла и попутно отметим, что поместив в обзоре [32] формулу Максвелла, авторы приводят процедуру ее получения. Легко убедиться, что реализация их рекомендации приводит не к формуле Максвелла, а к формуле (6.105), которая, как будет видно из дальнейшего, является лишь частным случаем формулы Максвелла.

Итак, рассмотрим случай размещения в неограниченной среде проводимости σ_2 включений — шаров проводимости σ_1 и радиуса a. Рассмотрим шар радиуса $b \gg a$, и пусть в нем содержится n малых шаров. Тогда при достаточно большом n имеем

$$na^3 = b^3 P_1. \tag{6.108}$$

Воспользуемся решением задачи о рассеянии однородного на бесконечности поля единичным шаровым включением. Как известно

[17], если центр сферической системы координат совместить с центром включения, то Π — потенциал рассеянного поля вне шара

$$\Pi = |\vec{H}| \left[\frac{a^3 (\sigma_2 - \sigma_1) \cos\theta}{r^2 (2\sigma_2 + \sigma_1)} \right]. \tag{6.109}$$

Пусть теперь $r \gg b$. Тогда, считая вклад каждого из малых шаров в рассеянное поле $\Pi(r)$ аддитивным и независимым, получим вклад включений шара радиуса b в виде

$$\tilde{\Pi} = \frac{na^3 (\sigma_2 - \sigma_1) \cos\theta}{r^2 (2\sigma_2 + \sigma_1)} |\vec{H}|. \tag{6.110}$$

С другой стороны, при оценке этого вклада будем считать, что шар радиуса b рассеивает поле как единичный шар — «включение», проводимость которого равна σ^*. Тогда

$$\tilde{\Pi} = \frac{b^3 (\sigma_2 - \sigma^*) \cos\theta}{r^2 (2\sigma_2 + \sigma^*)} |\vec{H}|. \tag{6.111}$$

Приравнивая (6.110) и (6.111), с учетом (6.108) получим формулу Максвелла

$$\sigma^* = \sigma_2 \frac{2\sigma_2 + \sigma_1 + 2P_1 (\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma_2 + \sigma_1 - P_1 (\sigma_1 - \sigma_2)}. \tag{6.112}$$

Нетрудно убедиться, что при малых P формула (6.112) эквивалентна формуле (6.104). И хотя при выводе (6.112) также принято, что концентрация включений мала (малы эффекты взаимовлияния включений), результаты расчетов даже при $P_1 \approx 1$ качественно приемлемы. Легко проверить, что в этом случае $\sigma^* \to \sigma_1$, чего нет при использовании формулы (6.104). Являясь приближенной, формула (6.112) в соответствии с допущением о слабом взаимодействии включений не описывает возможного эффекта запирания системы при $\sigma_1 = 0$ и достаточно больших P_1. Аналогично обстоит дело и при $\sigma_1 \to \infty$. Формула (6.112) не описывает «пробоя» системы при P_1, отличных от единицы.

Задача о сферических включениях, центры которых образуют в пространстве правильную периодическую решетку, и вычислении эффективной проводимости такой системы подвергается изучению, начиная с работы Рэлея, в которой получены первые два члена разложения σ^* по степеням концентрации включений P. Замечательно то, что первый — главный член этого разложения — совпадает с решением Максвелла (6.112). Следует отметить, что в работе [4] получены следующие два члена разложения. Там же показано, что если $\sigma_1 \ll \sigma_2$, т. е. проводимость включений меньше проводимости среды, то точное значение эффективной проводимости периодической структуры со сферическими включениями меньше или равно первому члену формулы Рэлея или, что то же самое, решению Максвелла (6.112), которое обозначим символом $\sigma^*_м$. Если же $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, то $\sigma^* \geqslant \sigma^*_м$.

Иными словами, в зависимости от того, лучше или хуже проводимость включений по сравнению с проводимостью матрицы, решение Максвелла является для точного значения σ^* оценкой сверху или снизу. Естественность этого факта становится очевидной, если учесть то обстоятельство, что решение Максвелла (6.112) является границей Хашина — Штрикмана для эффективной проводимости. В работе [4] получен также следующий результат. Если форма включений, образующих периодическую структуру, произвольна и $\sigma_2 \geqslant \sigma_1$, то и в этом случае решение Максвелла (6.112), т. е. $\overset{*}{\sigma}_м$, является оценкой сверху для одной трети следа тензора эффективной проводимости системы

$$(\overset{*}{\sigma}_{11} + \overset{*}{\sigma}_{22} + \overset{*}{\sigma}_{33})/3 \leqslant \overset{*}{\sigma}_м.$$

Таким образом, хотя последние результаты относились к периодическим, а не стохастическим системам, они показывают фундаментальность решения Максвелла. По-видимому, в этом нет ничего удивительного, поскольку предположения, принятые при выводе формулы Максвелла или ее предельного случая (6.104) естественны для периодических структур, для которых, в отличие от структур случайных, взаимодействие между включениями (они всегда изолированы) сравнительно слабое.

Завершая изложение метода Максвелла, приведем без вывода формулы для эффективной проводимости плоской системы проводимости σ_2, содержащей включения круговой формы проводимостью σ_1. Поступая аналогично случаю поля с шаровыми включениями, для плоской задачи получим

$$\overset{*}{\sigma}_{ii} = \sigma_2 \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + P_1(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 + \sigma_2 - P_1(\sigma_1 - \sigma_2)}, \quad i = 1, 2. \tag{6.113}$$

Из (6.113) при малых P_1 имеем

$$\overset{*}{\sigma}_{ii} = \sigma_2 \left[1 - 2P \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right],$$

т. е. формулу (6.105).

КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ИЗОТРОПНОГО ПОЛЯ

Гидродинамическое давление p в неоднородной по проницаемости, но изотропной в малой среде в случае стационарной фильтрации удовлетворяет уравнению

$$\nabla(\sigma \nabla p) = 0, \tag{6.114}$$

где проницаемость $\sigma(x, y, z)$ является скалярной случайной функцией координат. Будем считать область фильтрации неограниченной и в качестве дополнительного условия для уравнения (6.114) примем, что задан средний градиент давления, постоянный во всей

области течения. В этом случае, решив уравнение (6.114) с указанным дополнительным условием, можно вычислить среднюю скорость фильтрации, тем самым определив эффективную проницаемость.

Возможен другой подход [36]. Задав в качестве дополнительного условия среднюю скорость фильтрации, можно отыскать средний градиент давления, что также дает возможность определить эффективную проводимость. Как будет далее показано, эффективные характеристики, найденные таким образом и при точном решении идентичные, строго говоря, в корреляционном приближении различны. Рассмотрим последовательно оба подхода.

Пусть задан вектор $\nabla <p>$, компоненты которого в случае среднего течения, ориентированного вдоль оси x, имеют вид

$$\partial p_0/\partial x = \text{const}, \quad \partial p_0/\partial y = \partial p_0/\partial z = 0. \tag{6.115}$$

Используя метод возмущений, представим проницаемость и давление в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma', \quad \sigma_0 = <\sigma>, \quad p = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots \tag{6.116}$$

Подставив (6.116) в закон Дарси и ограничиваясь малыми второго порядка, т. е. корреляционным приближением, можно написать для v,

$$<v_x> = -\frac{1}{\mu}\left(\sigma_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + <\sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x}> + \sigma_0 \frac{\partial <p_2>}{\partial x}\right). \tag{6.117}$$

Однако поскольку при выбранном нами дополнительном условии

$$\partial <p>/\partial x = \partial p_0/\partial x, \quad \partial <p_2>/\partial x = 0,$$

уравнение (6.117) упрощается и имеет вид

$$<v_x> = -\frac{1}{\mu}\left(\sigma_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + <\sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x}>\right). \tag{6.118}$$

Вынеся $\partial p_0/\partial x$ за скобки, перепишем его в виде

$$<v_x> = -\frac{\sigma^*}{\mu}\frac{\partial p_0}{\partial x}, \tag{6.119}$$

где

$$\sigma^* = \sigma_0 + <\sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x}> \left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^{-1}. \tag{6.120}$$

Очевидно σ^* и является искомой эффективной проницаемостью.

Пусть теперь поле $k'(\vec{r})$ однородно и изотропно. Как показано в главе 5 (см. формулу (5.23), если корреляционная функция проницаемости на бесконечности стремится к нулю вместе со своей производной, то независимо от ее вида момент равен

$$<\sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x}> = -\frac{D}{3\sigma_0}\frac{\partial p_0}{\partial x},$$

где D — дисперсия проницаемости и, следовательно,

$$\sigma^* = \sigma_0\left(1 - D/3\sigma_0^2\right). \tag{6.121}$$

Рассматривая аналогичную задачу в пространстве двух измерений, можно получить

$$\sigma^* = \sigma_0 (1 - D/2\sigma_0^2). \tag{6.122}$$

Формулы (6.121), (6.192) известны [17, 36, 45] и приводя их, мы хотим указать на их некоторые недостатки и возможности уточнения. Совершенно очевидно, что полученные для эффективной проницаемости выражения являются приближенными, поскольку использовано лишь второе приближение теории возмущений. Существенно, что при достаточно больших отношениях D/σ_0^2 эффективная проницаемость σ^* согласно формулам (6.121) и (6.122) становится отрицательной, что неверно качественно. Это обстоятельство ограничивает применимость приведенных формул. Далее мы покажем, что задание в качестве дополнительного условия средней скорости фильтрации приводит к формулам для σ^*, свободным от этого недостатка.

Итак, будем искать решение уравнения (6.114) при условии $<\vec{v}> = \text{const}$. Считая, что вектор $<\vec{v}>$ направлен вдоль оси x, обозначим его компоненту вдоль этой оси через v. Используя метод возмущений и представив σ и p в виде (6.116), невозмущенное решение p_0 определим следующим образом. Оно удовлетворяет уравнению $\sigma_0 \nabla^2 p_0 = 0$ при условии

$$\partial p_0/\partial x = -v_\mu/\sigma_0 = \text{const}. \tag{6.123}$$

Очевидно, что p_1 удовлетворяет уравнению

$$\sigma_0 \nabla^2 p_1 = \frac{v_\mu}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \tag{6.124}$$

при условии обращения решения на бесконечности в нуль.

Аналогично записываются уравнения и для других p_i. Подставляя (6.116) в закон Дарси для компоненты v_x и усредняя, получим, ограничиваясь малыми второго порядка

$$v = -\frac{1}{\mu}\left(\sigma_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + <\sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x}> + \sigma_0 \frac{\partial <p_2>}{\partial x}\right). \tag{6.125}$$

Если учесть условие (6.123), то из (6.125) найдем

$$\sigma_0 \partial <p_2>/\partial x = -<\sigma' \partial p_1/\partial x>. \tag{6.126}$$

Приступая теперь к вычислению среднего градиента давления, продифференцируем $p = p_0 + p_1 + p_2$ и усредним. Тогда, учитывая, что $<\partial p_1/\partial x> = 0$, а для p_0 и p_1 справедливы равенства (6.125), (6.126), можно записать

$$\frac{\partial <p>}{\partial x} = -\frac{v_\mu}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma_0} <\sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x}>, \tag{6.127}$$

или в другой форме

$$\partial <p>/\partial x = -v_\mu/\sigma^*, \tag{6.128}$$

где

$$\sigma^* = \left[\frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{v_\mu \sigma_0} <\sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x}>\right]^{-1} \tag{6.129}$$

и является, очевидно, эффективной проницаемостью. Подставив значение $\langle \sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x} \rangle$ при условии (6.123), получим

$$\sigma^* = \sigma_0 [1 + D/3\sigma_0^2]^{-1}. \quad (6.130)$$

Аналогично в случае плоской и одномерной задачи соответственно

$$\sigma^* = \sigma_0 [1 + D/2\sigma_0^2]^{-1}, \quad (6.131)$$

$$\sigma^* = \sigma_0 [1 + D/\sigma_0^2]^{-1}. \quad (6.132)$$

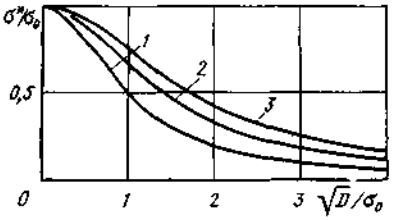


Рис. 24. Зависимость безразмерной эффективной проводимости σ^*/σ_0 от коэффициента вариации проводимости $\sqrt{D}/\sigma_0$.

Системы: *1* — одномерная; *2* — плоская; *3* — трехмерная

Следует отметить, что хотя последние три формулы также являются приближенными, качественно они приемлемы во всем диапазоне изменения параметра D/σ_0^2. Нетрудно убедиться, что при малых значениях D/σ_0^2 формулы (6.130) и (6.131) эквивалентны (6.121), (6.122). Для этого достаточно разложить только что полученные соотношения в ряд по степеням D/σ_0^2 и ограничиваться двумя первыми членами.

Нелишне отметить, что в предположении о логнормальном распределении проницаемости σ формула (6.132) является точной.

Степень влияния величины $\zeta^2 = D/\sigma_0^2$ на относительную эффективную проницаемость σ^*/σ_0 отражена на рис. 24, где кривые *1*, *2*, *3* соответствуют зависимостям для одномерного, плоского, пространственного полей соответственно. Сильнее всего неоднородность среды влияет на эффективную проницаемость в случае одномерного течения. С повышением размерности пространства влияние неоднородности ослабевает, что связано с увеличением количества обходных путей для обтекания слабопроницаемых включений. В одномерном случае возможности обхода не существует, что и объясняет наибольшее отклонение σ^* от σ_0.

КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛЯ

Существует точка зрения, подтверждаемая лабораторными и натурными наблюдениями, что реальные пористые среды анизотропны. С одной стороны, среда может быть анизотропна в «малом», но если анизотропные элементы перемешаны достаточно равномерно, то в «большом» такая среда будет изотропной. В практически интересных случаях, по-видимому, имеет место иная картина. Среда состоит из изотропных элементов, характерные размеры которых по разным осям различны. Если проницаемость элементов флуктуирует, а сами элементы расположены в пространстве достаточно упорядоченно, то в «большом» такая среда будет

однородно-анизотропной. Предельным случаем такой модели являются слоистые среды.

Итак, рассмотрим неограниченный фильтрационный поток в среде с локально-изотропной проницаемостью, корреляционная функция которой, однако, анизотропна. Будем считать заданным вектор средней скорости фильтрации $\langle \vec{v} \rangle$ и разыскивать $\nabla \langle p \rangle$. Связь между ними позволит найти эффективную проницаемость среды, которая, очевидно, будет в этом случае не скаляром, а тензором второго ранга.

Рассмотрим случай, когда вектор средней скорости фильтрации $\langle \vec{v} \rangle$ направлен вдоль оси x, т. е. $\langle v_x \rangle = v$, $\langle v_y \rangle = 0$, $\langle v_z \rangle = 0$. Представив случайное поле в виде $\sigma = \sigma_0 + \sigma'$, $\sigma_0 = \langle \sigma \rangle = \text{const}$, будем искать решение в виде ряда $p = p_0 + p_1 + \ldots$, где p_0 удовлетворяет уравнению $\sigma_0 \nabla^2 p_0 = 0$ при условии $\mu v = -\sigma_0 \nabla p_0$, что сразу дает

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = -v\mu/\sigma_0, \quad \partial p_0/\partial y = \partial p_0/\partial z = 0. \tag{6.133}$$

Подставив выражение для σ и p в усредненный закон Дарси

$$\langle \vec{v} \rangle = -\mu^{-1} \langle \sigma \nabla p \rangle \tag{6.134}$$

и ограничиваясь малыми второго порядка, запишем

$$\begin{aligned} -v\mu &= \sigma_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + \left\langle \sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\rangle + \sigma_0 \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial x} \right\rangle, \\ 0 &= \sigma_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + \left\langle \sigma' \frac{\partial p_1}{\partial y} \right\rangle + \sigma_0 \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial y} \right\rangle, \\ 0 &= \sigma_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \left\langle \sigma' \frac{\partial p_1}{\partial z} \right\rangle + \sigma_0 \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial x} \right\rangle. \end{aligned} \tag{6.135}$$

Если учесть найденные ранее компоненты ∇p_0, то из (6.135) следует

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial x} \right\rangle &= -\frac{1}{\sigma_0} \left\langle \sigma' \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial y} \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_0} \left\langle \sigma' \frac{\partial p_1}{\partial y} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial z} \right\rangle &= -\frac{1}{\sigma_0} \left\langle \sigma' \frac{\partial p_1}{\partial z} \right\rangle, \end{aligned} \tag{6.136}$$

или несколько иначе

$$\left\langle \frac{\partial p_2}{\partial x} \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_0} H^{(1)}, \quad \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial y} \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_0} H^{(2)}, \quad \left\langle \frac{\partial p_2}{\partial z} \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_0} H^{(3)}. \tag{6.137}$$

Теперь можно представить компоненты среднего градиента давления в виде

$$\left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle = -\frac{v\mu}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma_0} H^{(1)}, \quad \left\langle \frac{\partial p}{\partial y} \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_0} H^{(2)}, \quad \left\langle \frac{\partial p}{\partial z} \right\rangle = -\frac{1}{\sigma_0} H^{(3)}. \tag{6.138}$$

Остается вычислить моменты $H^{(i)}$, для чего следует задать конкретную корреляционную функцию случайного поля $\sigma'(\vec{r})$. Приме-

ром может служить ε-корреляционная функция, определенная так: коэффициент корреляции проводимости в двух точках пространства $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ равен единице, если одновременно выполнены неравенства

$$|x_1 - x_2| \leqslant \varepsilon_1, \quad |y_1 - y_2| \leqslant \varepsilon_2, \quad |z_1 - z_2| \leqslant \varepsilon_3,$$

и равен нулю, если хотя бы одно из них не выполняется.

Обратившись к четвертому разделу из главы 5, где эта корреляция подробно рассмотрена и отмечена ее условность как аппроксимации истинных корреляционных функций, запишем

$$H^{(i)} = \frac{D}{\sigma_0}\frac{\partial p_0}{\partial x}\int\limits_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1}\int\limits_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2}\int\limits_{-\varepsilon_3}^{\varepsilon_3}\frac{\partial^2 G(\vec{r}, 0)}{\partial x_1 \partial x_i}dx_1 dx_2 dx_3, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad (6.139)$$

что дает после вычислений

$$\left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle = v\mu\left[\frac{1}{\sigma_0} + \frac{2D}{\pi\sigma_0^3}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}}\right],$$

$$\langle \partial p/\partial y \rangle = 0, \quad \langle \partial p/\partial z \rangle = 0. \qquad (6.140)$$

Из последних формул следует, что вектор $\langle \nabla p \rangle$ коллинеарен вектору $\langle \vec{v} \rangle$, а это означает, что оси x, y, z являются главными осями тензора эффективной проводимости и тензора, обратного ему. Из (6.140) получим для первой компоненты тензора σ^*

$$\sigma^*_{xx} = \sigma_0\left[1 + \frac{2D}{\pi\sigma_0^2}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}}\right]^{-1}. \qquad (6.141)$$

Направляя вектор $\langle \vec{v} \rangle$ по другим двум осям, получим аналогично

$$\sigma^*_{yy} = \sigma_0\left[1 + \frac{2D}{\pi\sigma_0^2}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}}\right]^{-1}, \qquad (6.142)$$

$$\sigma^*_{zz} = \sigma_0\left[1 + \frac{2D}{\pi\sigma_0^2}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}}\right]^{-1}. \qquad (6.143)$$

Уместно заметить, что если при постановке задачи считать заданным градиент среднего давления, то вместо формул (6.141), (6.142), (6.143) для главных значений тензора эффективной проводимости получаются выражения, вытекающие из только что полученных разложением в ряд по степеням D/σ_0^2 с удержанием в ряду двух первых членов. В этом случае при достаточно больших значениях параметра D/σ_0^2 мы получили бы качественно неверные результаты. Формулы (6.141), (6.142), (6.143) свободны от этого недостатка.

Итак, приведенный к главным осям тензор эффективной проводимости имеет вид

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \sigma^*_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^*_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^*_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (6.144)$$

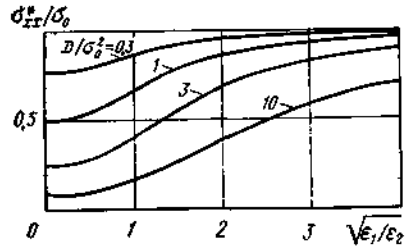


Рис. 25. Зависимость первой компоненты тензора эффективной проводимости σ^*_{xx}/σ_0 от параметра $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ при различных значениях квадрата коэффициента вариации проводимости D/σ_0^2

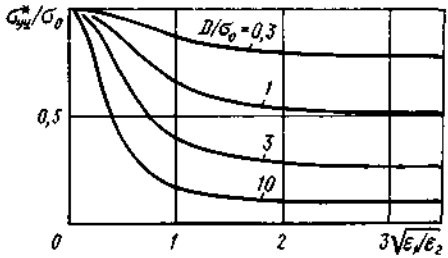


Рис. 26. Зависимость второй компоненты тензора эффективной проводимости σ^*_{yy}/σ_0 от параметра $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ при различных значениях квадрата коэффициента вариации проводимости D/σ_0^2

Если интересует тензор эффективной проводимости в произвольной прямоугольной системе координат x', y', z', то его нетрудно получить из (6.144) по известным формулам.

Рассмотрим некоторые свойства тензора σ^*. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$, т. е. масштабы корреляции по разным осям одинаковы. Хотя такой случай не соответствует полностью изотропному полю, анизотропия его настолько незначительна, что поле эффективных параметров изотропно. В самом деле, из (6.141), (6.142), (6.143) следует

$$\sigma^*_{xx} = \sigma^*_{yy} = \sigma^*_{zz} = \sigma_0\left(1 + \frac{D}{3\sigma_0^2}\right)^{-1}, \qquad (6.145)$$

т е. тензор σ^* является шаровым. Нетрудно заметить, что (6.145) совпадает с (6.130), полученным для полностью изотропного поля.

Для рассмотрения плоской задачи, например, в плоскости x, y следует в формулах для σ^* положить $\varepsilon_3 \to \infty$, что дает

$$\sigma^*_{xx} = \sigma_0\left[1 + \frac{2D}{\pi\sigma_0^2}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right]^{-1},$$

$$\sigma^*_{yy} = \sigma_0\left[1 + \frac{2D}{\pi\sigma_0^2}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right]^{-1}, \quad \sigma^*_{zz} = \sigma_0. \qquad (6.146)$$

Зависимости σ^*_{xx}/σ_0 и σ^*_{yy}/σ_0 от $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ приведены на рис. 25, 26.

Положив в первых двух формулах (6.146) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, получим $\sigma^*_{xx} = \sigma^*_{yy} = \sigma_0\left(1 + D/2\sigma_0^2\right)^{-1}$. В этом случае тензор σ^* имеет вид

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \sigma^*_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^*_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix},$$

т. е. проводимость в плоскости x, y изотропна, во всем пространстве она анизотропна.

Для рассмотрения одномерного поля следует в формулах (6.146) положить $\varepsilon_2 \to \infty$. Получим

$$\overset{*}{\sigma}_{xx} = \sigma_0 \left(1 + D/\sigma_0^2\right)^{-1}, \quad \overset{*}{\sigma}_{yy} = \overset{*}{\sigma}_{zz} = \sigma_0.$$

В этом случае тензор σ^* примет вид

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \overset{*}{\sigma}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь коэффициенты анизотропии, определив их следующим образом:

$$\lambda_1^2 = \overset{*}{\sigma}_{xx}/\overset{*}{\sigma}_{yy}, \quad \lambda_2^2 = \overset{*}{\sigma}_{xx}/\overset{*}{\sigma}_{zz}, \quad \lambda_3^2 = \overset{*}{\sigma}_{yy}/\overset{*}{\sigma}_{zz}. \tag{6.147}$$

Нетрудно видеть, что коэффициент λ_3 записывается в виде $\lambda_3^2 = \lambda_2^2/\lambda_3^2$. Подставив $\overset{*}{\sigma}_{ii}$ в (6.147), получим

$$\lambda_1^2 = \frac{1 + \dfrac{2D}{\pi\sigma_0^2} \operatorname{arctg} \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}}}{1 + \dfrac{2D}{\pi\sigma_0^2} \operatorname{arctg} \dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}}}, \tag{6.148}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1 + \dfrac{2D}{\pi\sigma_0^2} \operatorname{arctg} \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}}}{1 + \dfrac{2D}{\pi\sigma_0^2} \operatorname{arctg} \dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}}}. \tag{6.149}$$

Выражения для коэффициентов анизотропии содержат три независимых параметра: квадрат коэффициента вариации проводимости и отношения масштабов D/σ_0^2, $\varepsilon_1/\varepsilon_3$, $\varepsilon_2/\varepsilon_3$. Отсюда следует, что знание λ_1 и λ_2 и одного из этих параметров дает возможность определить остальные два. Процедура эта может быть следующей. Коэффициенты λ_1 и λ_2 можно получить при помощи натурных исследований на пластовой системе в целом. Коэффициент вариации проводимости можно определить, располагая достаточно представительной совокупностью локальных измерений проводимости. Эта информация достаточна для определения $\varepsilon_1/\varepsilon_3$ и $\varepsilon_2/\varepsilon_3$ по формулам (6.148), (6.149).

Если неоднородность среды носит линзовидный характер, причем, как это обычно бывает, размер линз по вертикали значительно меньше их размеров в плоскости x, y, из формул для λ следует

$$\lambda_1^2 = 1, \quad \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1 + D/\sigma_0^2.$$

Очевидно, знание коэффициентов анизотропии в этом случае дает возможность найти D/σ_0^2, т. е. локальную статистическую характеристику с помощью макроскопических параметров λ_i.

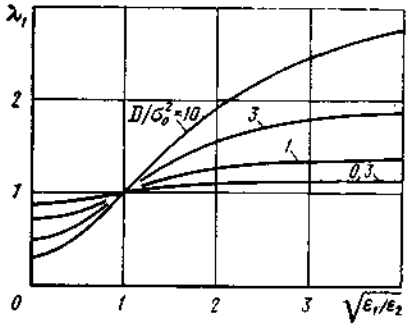


Рис. 27. Зависимость коэффициента анизотропии λ_1 от параметра $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ для различных значений квадрата коэффициента вариации проводимости D/σ_0^2

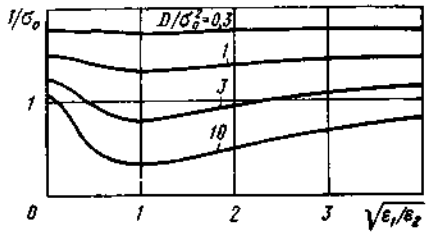


Рис. 28. Зависимость безразмерного инварианта тензора эффективной проводимости J/σ_0 от параметра $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$ для различных значений квадрата коэффициента вариации проводимости D/σ_0^2

В том случае, когда вертикальный размер линзовидных включений сравним с толщиной пласта, следует воспользоваться формулами для плоской задачи. В этом случае

$$\lambda_1^2 = \frac{1+\dfrac{2D}{\pi\sigma_0^2}\operatorname{arctg}(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}{1+\dfrac{2D}{\pi\sigma_0^2}\operatorname{arctg}(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}. \qquad (6.150)$$

На рис. 27 представлены зависимости $\lambda_1(\varepsilon_1/\varepsilon_3)$. Как и в случае трех измерений, на плоскости по известным λ_1 и D/σ_0^2 можно определить отношение масштабов корреляции $\varepsilon_2/\varepsilon_1$. Существенно отметить, что знание главных значений тензора проводимости дает бо́льшую информацию, чем коэффициенты анизотропии λ_i. Очевидно, если известны σ_i^*, то, зная, например, σ_0, можно определить D/σ_0^2 и $\varepsilon_1/\varepsilon_3$, $\varepsilon_2/\varepsilon_3$. На плоскости, зная σ_{xx}^*, σ_{yy}^* и σ_0, можно найти D/σ_0^2 и $\varepsilon_1/\varepsilon_2$.

Отметим и такое обстоятельство. Не всегда известны направления главных осей тензора эффективной проводимости и главные его значения. Но поскольку сумма диагональных компонент этого тензора инвариантна по отношению к повороту осей координат, знание инварианта позволяет получить некоторую информацию о структуре поля. В плоском случае инвариантом является сумма

$$J = \sigma_{x'x'}^* + \sigma_{y'y'}^* \qquad (6.151)$$

или, подставив значения $\sigma_{x'x'}^*$ и $\sigma_{y'y'}^*$, получим

$$J = \sigma_1 \frac{2+D/\sigma_0^2}{1+\dfrac{D}{\sigma_0^2}+\dfrac{4D^2}{\pi^2\sigma_0^4}\operatorname{arctg}\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\operatorname{arctg}\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \qquad (6.152)$$

Зная инвариант J, а также σ_0, D/σ_0^2, из (6.152) можно найти $\varepsilon_1/\varepsilon_2$. Очевидно, инвариант можно определить, замерив проводимость в двух произвольных взаимно перпендикулярных направлениях.

Зависимость инварианта J от D/σ_0^2 и $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ приведена на рис. 28. Нетрудно видеть, что при относительно небольших значениях D/σ_0^2 инвариант слабо зависит от отношения $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ и, следовательно, мало пригоден для отыскания масштабов неоднородности. При больших коэффициентах вариации проводимости зависимость J от $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ становится весьма ощутимой, но уравнение $J(\varepsilon_1/\varepsilon_2) = J_0$ имеет два корня, и требуется дополнительная информация для выбора нужного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

В последнее время для оценки точности приближенных решений задачи определения эффективных параметров используются численные решения задач переноса для достаточно протяженных неоднородных систем. Как показано в [32], приближенные соотношения, даваемые так называемой теорией эффективной среды, весьма удовлетворительно согласуются с результатами численных экспериментов во всей области изменения параметров, за исключением, быть может, небольшой критической области вблизи порога перколяции (протекания), т. е. той концентрации непроводящего компонента, вблизи которой происходит запирание двухкомпонентной системы проводник — изолятор. В [32] на примере сеток со случайными сопротивлениями выявлены причины высокой эффективности самосогласованного решения теории эффективной среды, имеющего второй порядок точности по концентрации, в то время, как, например, метод возмущений (первое приближение) или приближения малой концентрации имеет только первый порядок точности. К этому следует добавить, что самосогласованные решения дают асимптотически точные результаты при больших и малых концентрациях. Указания на удовлетворительное совпадение результатов теории эффективной среды с физическим экспериментом имеются в [3, 25, 32, 42]. Далее методами теории самосогласования рассмотрены задачи определения эффективных параметров ряда систем и указана связь этих решений в двумерном случае с результатами А. М. Дыхне.

Пусть поток $\vec{v}$ и поле $\vec{h}$ связаны системой уравнений

$$\vec{v} = \sigma\vec{h}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{h} = 0. \tag{6.153}$$

Локальная проводимость σ является случайным тензором, зависящим от координат (x_1, x_2, x_3). Введя в рассмотрение средние потоки и поля

$$\vec{V} = \langle\vec{v}\rangle, \quad \vec{H} = \langle\vec{h}\rangle \tag{6.154}$$

(угловые скобки символизируют усреднение по ансамблю, а в случае эргодичных полей — усреднение по объему), определим тензор эффективной проводимости σ^* из соотношения

$$\vec{V} = \sigma^* \vec{H}. \tag{6.155}$$

Рассмотрим задачу об эффективной проводимости гетерогенной R-компонентной композитной системы, т. е. предположим, что пространство делится на подобласти, внутри которых $\sigma = \sigma^k = \text{const}\,(k = 1,2, \ldots, R)$. Выделим одну из подобластей — элемент неоднородности и рассмотрим поле внутри ее. Очевидно, это поле в основном зависит от таких факторов, как величина σ в подобласти, формы ее границы, значений σ для ближайших индивидуальных подобластей — элементов, лежащих в «пограничном слое», среднего поля для всей системы, принимаемого постоянным, и эффективной проводимости всей системы σ^*. Приближение метода самосогласования заключается в пренебрежении «пограничным слоем» и рассмотрении поля в подобласти, окруженной эффективной средой, параметры которой пока неизвестны. Для их определения используется условие равенства среднего поля в подобластях заданному среднему полю для всей системы.

Пусть рассматриваемая подобласть — эллипсоид с полуосями a_1, a_2, a_3, а координатные оси x_1, x_2, x_3 — главные оси тензоров σ и σ^*. Тогда, как следует из [17], поле внутри эллипсоида $H^{(k)}$ постоянно и имеет вид

$$\vec{H}^k = \zeta^k \vec{H}, \quad \zeta_{ll}^k = \frac{\sigma_l^*}{\sigma_l^* - n_l\left(\sigma_l^* - \sigma_l^k\right)}, \quad \zeta_{lm}^k = 0, \quad l \neq m, \tag{6.156}$$

где коэффициенты n_l определены по формулам (6.97) и (6.98).

Усредняя $\vec{H}^k$ по всем варьируемым параметрам и приравнивая результат $\vec{H}$, получаем матричное уравнение для определения σ^*:

$$\langle \zeta \rangle - E = 0. \tag{6.157}$$

Здесь E — единичный диагональный тензор.

Рассмотрим двухкомпонентную систему и пусть включения однородны и изотропны, т. е. $\sigma = \sigma^k E$. Вероятность (концентрация) включений первого сорта составляет P, второго — $(1 - P)$.

Тогда (6.157) переходит в систему

$$P\frac{\sigma_i^* - \sigma^1}{\sigma_i^* - n_i\left(\sigma_i^* - \sigma^1\right)} + (1 - P)\frac{\sigma_i^* - \sigma^2}{\sigma^* - n_i\left(\sigma_i^* - \sigma^2\right)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6.158}$$

в которой уравнения «завязаны» через параметры n_i, зависящие от σ_i^*.

Уравнения (6.158) можно представить также в виде

$$\sigma_i^{*2}(1 - n_i) + \sigma_i^*\left[\sigma^1(n_i - P) + \sigma^2(P + n_i - 1)\right] - \sigma^1\sigma^2 n_i = 0,$$
$$i = 1, 2, 3. \tag{6.159}$$

Легко проверить, что уравнения (6.159) обладают свойством инвариантности при заменах $\sigma^1 \rightleftarrows \sigma^2$ и $P \rightleftarrows (1-P)$. По-видимому, для тех сред, преобразование которых порождает объекты, макроскопически существенно отличающиеся от исходных, самосогласованные эффективные параметры могут оказаться неудовлетворительными.

Решение системы (6.159) для получения зависимости $\sigma^*(P)$ во всем диапазоне изменения P при остальных фиксированных параметрах целесообразно осуществить следующим образом. Дифференцируя систему (6.159) по P, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируя которую численно при начальных условиях $\sigma_i^*(1) = \sigma^1$ либо $\sigma_i^*(0) = \sigma^2$, можно построить всю кривую $\sigma_i^*(P)$. Численный метод интегрирования должен быть достаточно точным, так как при существенно различных σ^1 и σ^2 для зависимостей $\sigma_i^*(P)$ характерна особенность — существование порога протекания. Как показали расчеты при $\sigma^1/\sigma^2 = 1 - 10^6$, достаточную точность обеспечивает метод Рунге — Кутта четвертого порядка.

В простейших случаях уравнения (6.159) решаются без привлечения численных методов. Прежде всего рассмотрим систему, состоящую из плоских слоев различной проводимости. В этом случае для определения $\sigma_{1,2}^*$ — эффективной проводимости вдоль слоев в (6.159) положим $n_i \to 0$, а для вычисления σ_3^* — поперечной эффективной проводимости подставим $n_3 \to 1$. Легко убедиться, что из (6.139) следуют известные точные решения $\sigma_{1,2}^* = \langle\sigma\rangle$, $\sigma_3^* = \langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}$.

Пусть, например, среда составлена из включений сферической формы. В этом случае система в целом изотропна — $n_1 = n_2 = n_3 = 1/3$ и выражение для эффективной проводимости имеет вид [25]

$$\sigma^*(P) = \frac{\sigma^1}{4}\left\{(3P-1) + \nu(2-3P) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{[(3P-1) + \nu(2-3P)]^2 + 8\nu}\right\}, \quad \nu = \sigma^2/\sigma^1. \tag{6.160}$$

Нетрудно убедиться, что при $\sigma^2/\sigma^1 \to 0$ эффективная проводимость зависит от P следующим образом:

$$\sigma^*(P) = \frac{3P-1}{2}\sigma^1 \quad \text{при} \quad P \geqslant 1/3,$$

$$\sigma^*(p) = 0 \quad \text{при} \quad P \leqslant 1/3, \tag{6.161}$$

т. е. $P = 1/3$ — оценка критической концентрации или по терминологии [38] — порога протекания — перколяции.

Если $\sigma^2/\sigma^1 \to \infty$, из (6.160) следует

$$\sigma^* = \frac{\sigma^1}{3P-2}, \quad P > 2/3, \tag{6.162}$$

$$\sigma^* = \infty, \quad P \leqslant 2/3,$$

т. е. «пробой» осуществляется при критической концентрации $P = 2/3$, что соответствует $P = 1/3$ — концентрации идеального проводника. Этот результат кажется несколько парадоксальным, если

учесть, что для запирания изотропной пространственной системы критическая концентрация изолятора должна быть не менее $^2/_3$, однако противоречия здесь нет. В самом деле, для «пробоя» системы достаточно, чтобы в ней существовал хотя бы один бесконечный кластер идеального проводника. Для запирания же системы существования бесконечного кластера изолятора недостаточно, нужно, чтобы отсутствовали бесконечные кластеры проводника. Для этого, конечно, концентрация изолятора должна быть выше, чем концентрация проводника при «пробое». Можно сказать, что «пробой» аналогичен порогу протекания системы из чистого изолятора, в которую постепенно добавляют проводящий компонент.

В случае плоской задачи (трубчатая, или, как иногда говорят, волокнистая структура, ориентированная нормально к некоторой плоскости) имеем при $n_1 = n_2 = 1/2$, $n_3 = 0$:

$$\sigma^*(P) = \frac{\sigma^1}{2}\left[(1-2P)(\nu-1) + \sqrt{(1-2P)^2(\nu-1)^2 + 4\nu}\right]. \quad (6.163)$$

Если $\nu = 0$, из (6.163) получим

$$\sigma^*(P) = \begin{cases} \sigma^1(2P-1), & P > 1/2, \\ 0, & P \leqslant 1/2, \end{cases} \quad (6.164)$$

т. е. $P = 1/2$ — критическая концентрация — порог протекания.

При $\nu = \sigma^2/\sigma^1 \to \infty$ из (6.163) имеем

$$\sigma^*(P) = \frac{\sigma^1}{2P-1}, \quad P > 1/2, \; \sigma^*(P) = \infty, \; P < 1/2. \quad (6.165)$$

Легко видеть, что в этом случае порог протекания и критическая концентрация при «пробое» совпадают, так как на плоскости и для «пробоя» и для запирания достаточно существования одного бесконечного кластера.

Из (6.163) следуют точные результаты А. М. Дыхне [9]

$$\sigma^*(P)\sigma^*(1-P) = \sigma^1\sigma^2, \quad \sigma^*(1/2) = \sqrt{\sigma^1\sigma^2}.$$

Кроме того, при $P = {}^1/_2$ точными оказываются средние потоки и поля в фазах, средние величины диссипируемой в фазах энергии. При $P > {}^1/_2$ решения (6.164) и (6.165) для включений — изолятора и идеального проводника удовлетворяют точному соотношению (6.37), т. е. их произведение равно $(\sigma^1)^2$. Можно показать, что и в общем случае произвольных σ^1 и σ^2 решения системы уравнений (6.159) удовлетворяют точным соотношениям (6.36), связывающим эффективные проводимости исходной и дополнительной плоских систем. Для этого, не решая системы, следует в нее подставить соотношения (6.36) и перейти к новой системе уравнений для эффективных проводимостей дополнительной среды. Нетрудно убедиться, что эта среда содержит, в отличие от исходной, вместо второй компоненты σ^2 включения проводимости $(\sigma^1)^2/\sigma^2$, что и доказывает высказанное утверждение.

Легко понять, что соотношения теории самосогласованного поля можно применять не только для стохастических сред. Так,

например, если включения размещены регулярно и образуют периодическую структуру, можно оценить ее эффективную проводимость, заменив включения подходящим образом подобранными эллипсоидами. А так как для некоторых периодических структур известны точные значения эффективной проводимости, можно оценить с их помощью качество приближенных зависимостей.

В работе [18] приведены точные значения эффективной проводимости плоской периодической структуры, ячейкой которой является квадрат единичной проводимости, внутри которого в свою очередь находится квадрат проводимости ν. Внутренний квадрат ориентирован параллельно внешнему, центры их совпадают, а отношение сторон составляет 1:3. В табл. 15 для различных ν приводятся точные значения эффективной проводимости периодической структуры σ^*, приближенные значения σ_I^* подсчитанные по формуле (6.163), а также σ_{II}^*, полученные при помощи приближений малой концентрации (6.105).

ТАБЛИЦА 15

ν	σ^*	σ_I^*	σ_{II}^*	ν	σ^*	σ_I^*	σ_{II}^*
0,0001	0,798	0,778	0,778	1	1	1	1
0,001	0,798	0,778	0,778	2	1,079	1,078	1,074
0,01	0,801	0,783	0,783	5	1,173	1,168	1,148
0,1	0,833	0,822	0,818	10	1,224	1,217	1,182
0,2	0,863	0,856	0,852	100	1,288	1,278	1,217
0,5	0,929	0,928	0,926	1000	1,296	1,285	1,222

Легко убедиться, что оба приближения близки к точным значениям, что, конечно, в первую очередь связано с малой концентрацией и изолированностью включений.

Рассмотрим случай, когда эллипсоиды — включения произвольно ориентированы в пространстве. Свяжем индивидуальный эллипсоид с лабораторной системой координат x_i, положение которой относительно основной системы x. определим тремя углами Эйлера α, β, γ. Пусть поле на бесконечности в основной системе имеет вид $\vec{H}^i$. Это же поле в лабораторной системе координат имеет вид $\vec{H}'^i = A\vec{H}^i$, где $A = A(\alpha, \beta, \gamma)$ — матрица перехода от основного базиса к лабораторному

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \\ -\sin\gamma\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha - \\ -\sin\gamma\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \cos\gamma\sin\beta$$
$$\begin{pmatrix} \sin\gamma\cos\beta\cos\alpha + \\ +\cos\gamma\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha + \\ +\cos\gamma\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \sin\gamma\sin\beta$$
$$-\sin\beta\cos\alpha \qquad \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos\beta$$

В лабораторной системе координат поле внутри эллипсоида $\vec{H}'^i = \zeta A\vec{H}^i$. Переходя к основному базису, получим $\vec{H}^i = A^{-1}\zeta A\vec{H}^i$

или, усреднив это поле и приравняв $\overleftarrow{H^l}$, получим матричное уравнение, обобщающее (6.157)

$$< A^{-1}\zeta A > - E = 0. \tag{6.166}$$

Если углы Эйлера распределены равномерно, эффективная среда будет изотропной, и для определения σ^* из (6.166) имеем уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} < \zeta_{ii} > = 3. \tag{6.167}$$

Пусть система неоднородностей двухкомпонентна. Тогда (6.167) примет вид

$$P\Phi(\sigma^*, \sigma^1) + (1-P)\Phi(\sigma^*, \sigma^2) = 0, \tag{6.168}$$

где

$$\Phi(\sigma^*, \sigma^l) = \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i(\sigma^i - \sigma^*)}{\sigma^* + n_i(\sigma^i - \sigma^*)}.$$

Для соответствующей плоской задачи, т. е. трубчатой структуры из параллельных третьей оси эллиптических цилиндров, имеем

$$\sigma_3 = < \sigma >, \quad \sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma^*,$$

где σ^* — решение уравнения (6.168), в котором n_i определены из соотношений (6.99).

Для иллюстрации метода приведем результаты расчетов некоторых частных случаев. На рис. 29, 30, 31 показаны зависимости компонентов тензора эффективной проводимости двухфазной системы от концентрации высокопроводящей фазы, проводимость которой принята равной единице. Проводимость другой фазы в этом и других, рассмотренных далее случаях составляет $\nu = 10^{-4}$. Система представлена совокупностью одинаково ориентированных бесконечных эллиптических цилиндров, отношение осей эллипсов — поперечных сечений цилиндров равно $a_2/a_1 = 1,\ 10^{-1},\ 10^{-2}$, где a_i — длина i-й оси эллипса. Хотя $\nu \neq 0$, на графиках достаточно четко отмечаются особенности — пороги протекания. Так, например, в случае $a_2/a_1 = 10^{-1}$ для проводимости вдоль первой оси порог P_1 близок к 0,4, для второй оси $P_2 \approx 0{,}6$. На рис. 32, 33, 34 аналогичные зависимости даны для систем, включения в которых представляют собой вытянутые вдоль первой оси эллипсоиды вращения с отношением осей $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 0{,}5;\ 10^{-1};\ 10^{-2}$. Очевидно, такие системы в плоскости (2.3) изотропны. Пороги протекания при $a_2/a_1 = 10^{-1}$ в этом случае составляют $P_1 \approx 0{,}2$, $P_2 = P_3 \approx 0{,}4$. Если включения — сплюснутые вдоль первой оси эллипсоиды вращения, отношения осей $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 1,\ 2,\ 10,\ 100$, то зависимости компонентов тензора эффективной проводимости от P выглядят следующим образом (рис. 35—38).

Пороги протекания, например для $a_2/a_1 = 10$, можно оценить так: $P_1 \approx 0{,}4$, $P_2 = P_3 = 0{,}2$.

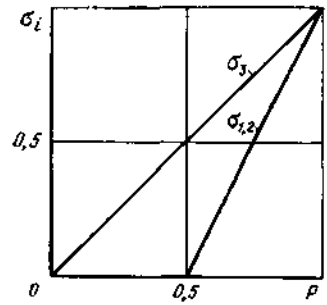


Рис. 29. Зависимость компонента тензора эффективной проводимости σ_i от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — эллиптические цилиндры, $a_2 = a_1$, $a_3 = \infty$)

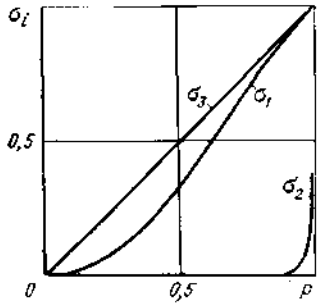


Рис. 31. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — эллиптические цилиндры, $a_2/a_1 = 10^{-2}$, $a_3 = \infty$)

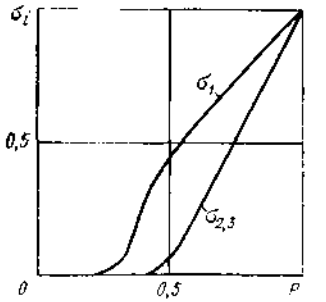


Рис. 33. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — вытянутые эллипсоиды вращения, $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 10^{-1}$)

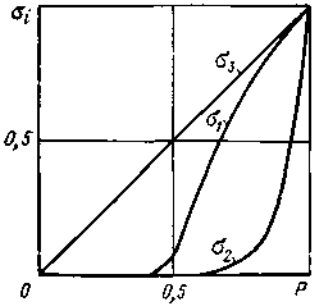


Рис. 30. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — эллиптические цилиндры, $a_2/a_1 = 10^{-1}$, $a_3 = \infty$)

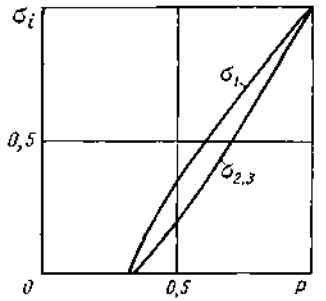


Рис. 32. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — вытянутые эллипсоиды вращения, $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 0{,}5$)

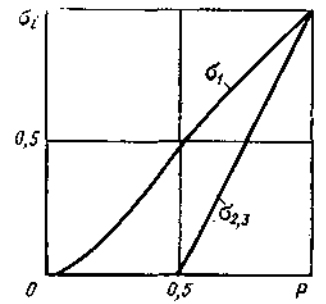


Рис. 34. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — вытянутые эллипсоиды вращения, $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 10^{-2}$)

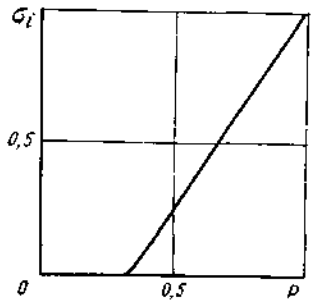


Рис. 35. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — сферы)

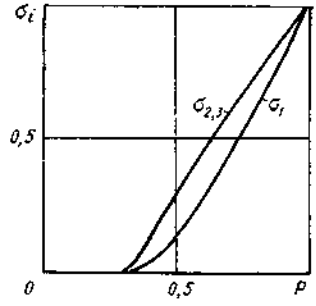


Рис 36. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — сплюснутые эллипсоиды вращения, $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 2$)

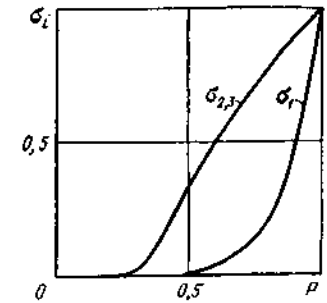


Рис. 37. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — сплюснутые эллипсоиды вращения, $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 10$)

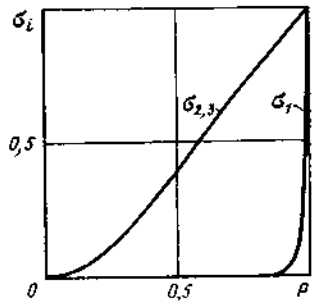


Рис. 38. Зависимость компонент тензора эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — сплюснутые эллипсоиды вращения, $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 10^2$)

Если включения — вытянутые эллипсоиды вращения — ориентированы в пространстве так, что углы Эйлера α, β, γ распределены равномерно в интервалах их возможного изменения, то эффективная среда изотропна и зависимости $\delta^*(P)$ представлены на рис. 39. Порог протекания зависит от соотношения осей эллипсоида вращения и лежит в сравнительно узком интервале $0{,}33 < P < 0{,}45$. На рис. 40 представлены аналогичные зависимости для равномерно ориентированных в пространстве сплюснутых эллипсоидов вращения. В этом случае порог протекания сильно зависит от сплюснутости эллипсоидов и изменяется в широком интервале: $0{,}33 < P < 1$.

Более полная информация о зависимости самосогласованных эффективных параметров от определяющих представлена в приложении. Расчеты для составления таблиц выполнены на ЭВМ,

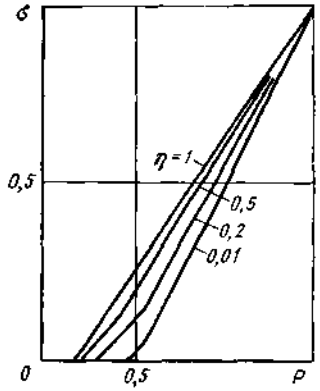


Рис. 39. Зависимость эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при ($\nu = 10^{-4}$) (включения — равномерно ориентированная в пространстве система вытянутых эллипсоидов вращения, $\eta = a_2/a_1 = a_3/a_1$ — степень вытянутости)

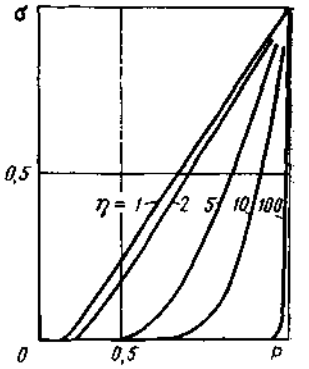


Рис. 40. Зависимость эффективной проводимости от концентрации высокопроводящей фазы P при $\nu = 10^{-4}$ (включения — равномерно ориентированные в пространстве сплюснутые эллипсоиды вращения, $\eta = a_2a_1 = a_3a_1$ — степень сплюснутости).

результаты получены с точностью до 10^{-8}, в таблицах они округлены до четвертого знака.

При выводе уравнений для эффективной проводимости (6.157) или (6.156) предполагалось, что поля в подобластях — элементах неоднородности в рассматриваемом приближении эквивалентны полям тех же элементов, погруженных в неограниченную среду, наделенную эффективными свойствами. При этом как бы игнорируется возможное различие в топологии пространств, занятых различными фазами, а элементы неоднородности различаются лишь значением проводимости в них. Представляется правдоподобным, что используя симметрию фаз такого рода, затруднительно описать среды, которым она не присуща, например матричные структуры с различной связностью включений и матрицы.

Однако более детальный анализ показывает, что можно получить самосогласованные эффективные проводимости при более слабых ограничениях, не предполагая явно указанную симметрию, и, тем не менее, они окажутся теми же, что и ранее. Отсюда следует вывод, что причиной инвариантности эффективных проводимостей при заменах $\sigma^1 \rightleftarrows \sigma^2$ и $P \rightleftarrows 1-P$ является единственное предположение об однородности поля внутри включения, погруженного в эффективную среду. Покажем это на примере матричной структуры проводимости σ^2 с включениями проводимости σ^1.

Запишем точные уравнения баланса потока и поля

$$P_1\sigma^1\vec{H}_1 + P_2\sigma^2\vec{H}_2 = \sigma_*\vec{H}, \quad P_1\vec{H}_1 + P_2\vec{H}_2 = \vec{H}, \qquad (6.169)$$

где $\vec{H}_i = < h >_i$ — среднее значение поля в соответствующей фазе.

Используя основную гипотезу теории эффективной среды, будем при подсчете $\vec{H}_1$ исходить из того, что включения проводимости σ^1 погружены в эффективную среду. Если лабораторные системы координат, связанные с включениями, произвольно ориентированы в пространстве, то, как уже было показано выше,

$$\vec{H}_1 = < A^{-1}\zeta A > \vec{H}, \tag{6.170}$$

где усреднение проводится по углам Эйлера, а неслучайный тензор ζ определен равенствами

$$\zeta^{ii} = \frac{\sigma_*^{ii}}{\sigma^{ii} - n_i\left(\sigma^{ii} - \sigma_1^i\right)}, \quad \zeta^{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Подставив $\vec{H}_1$ в систему (6.169) и исключив $\vec{H}_2$, получим

$$\sigma_* = \sigma^2 E + P_1\left(\sigma^1 - \sigma^2\right) < A^{-1}\zeta A > . \tag{6.171}$$

Пусть для простоты все включения ориентированы одинаково. Тогда можно считать $A = E$ и, следовательно,

$$\sigma_*^{ii} = \sigma^2 + P_1\left(\sigma^1 - \sigma^2\right)\frac{\sigma_*^{ii}}{\sigma_*^{ii} - n_i\left(\sigma_*^{ii} - \sigma^1\right)}. \tag{6.172}$$

Преобразовав (6.172), получим уравнение

$$\left(\sigma_*^{ii}\right)(1 - n_i) + \sigma_*^{ii}\left[\sigma^1\left(n_i - P_1\right) + \sigma^2\left(n_i - P_2\right)\right] - \sigma^1\sigma^2 n_i = 0,$$

в точности совпадающее с (6.159).

Таким образом, предположение о возможности погружения различных элементов неоднородности в эффективную среду эквивалентно по конечному результату гипотезе о погружении только одного вида элементов — включений.

Изложенная теория эффективных самосогласованных характеристик построена на базе в достаточной степени интуитивных физических соображений о поле во включениях. Остается неясным, как перенести идеи самосогласования на случай непрерывного поля проводимости. Далее мы вновь, в связи с рассмотрением метода перенормировок и сингулярного приближения, вернемся к изучению самосогласованных параметров и оценке их качества. Там же будет рассмотрен еще один вариант метода самосогласования, называемый иногда теорией эффективного поля [12].

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ

Система дифференциальных уравнений для локальных характеристик — потока $\vec{v}$ и поля $\vec{h}$

$$\vec{v} = \sigma\vec{h}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{h} = 0, \tag{6.173}$$

равенства, определяющие эффективную проводимость,

$$\vec{V} = <\vec{v}>, \quad \vec{H} = <\vec{h}>, \quad \vec{V} = \sigma^* \vec{H} \tag{6.174}$$

вместе с дополнительным условием, фиксирующим $\vec{H}$ либо $\vec{V}$, представляет собой замкнутую систему для вычисления эффективной проводимости σ^*. Здесь уместно подчеркнуть, что поскольку цель — не получение единственного решения системы (6.173), а определение связи между любыми средними потоком и полем, удовлетворяющим системе, фиксация $\vec{H}$ либо $\vec{V}$ носит условный характер, так как эффективная проводимость не зависит от них. Как будет видно далее, дополнительное условие вводится для реализации способа определения эффективной проводимости.

Используя представления

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma', \quad \vec{h} = \vec{H} + \vec{h}', \quad \sigma_0 = <\sigma> \tag{6.175}$$

и усреднив первое уравнение из (6.173), получим

$$\vec{V} = \sigma_0 \vec{H} + <\sigma' \vec{h}'>. \tag{6.176}$$

Поскольку система (6.173) линейна, флуктуация поля $\vec{h}'$ должна быть линейно связана со средним полем $\vec{H}$, т. е.

$$\vec{h}' = S' \vec{H}, \tag{6.177}$$

где случайный тензор S' подлежит определению из исходной системы (6.173).

Подставив (6.177) в (6.176) и сравнив с (6.174), получим

$$\sigma^* = \sigma_0 + <\sigma' S'>. \tag{6.178}$$

Таким образом, вычисление σ^* сведено к определению тензора S' и вычислению его корреляции с σ'. В самом деле, подставим (6.175) в (6.173) и учтем постоянство $\vec{H}$. Тогда

$$\operatorname{div}[(\sigma_0 + \sigma')\vec{h}'] = -\nabla \sigma' \vec{H}. \tag{6.179}$$

Поскольку $H = \text{const}$, поле $\vec{h}'$, как и $\vec{h}$, является безвихревым и, следовательно, существует функция $u(r)$ — его потенциал

$$\vec{h}' = \nabla u. \tag{6.180}$$

Подставив (6.180) в (6.179), запишем

$$\operatorname{div}(\sigma_0 \nabla u) = -\nabla \sigma' \vec{H} - \operatorname{div}(\sigma' \nabla u). \tag{6.181}$$

Введем в рассмотрение два дифференциальных оператора:

$$L_0 = \operatorname{div}(\sigma_0 \nabla) \quad \text{и} \quad L_1 = -\operatorname{div}(\sigma' \nabla),$$

а также интегральный оператор M_0, обратный оператору L_0, т. е. $M_0 = L_0^{-1}$. Тогда, обозначив $\varphi = -\nabla \sigma' \vec{H}$, получим

$$L_0 u = \varphi + L_1 u, \tag{6.182}$$

или равносильное ему равенство

$$u = M_0 \varphi + M_0 L_1 u. \tag{6.183}$$

Переписав его в виде

$$(E - M_0 L_1)\, u = M_0 \varphi, \tag{6.184}$$

можно формально записать и решение

$$u = (E - M_0 L_1)^{-1} M_0 \varphi. \tag{6.185}$$

Разложив его в ряд по степеням $M_0 L_1$, получим

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (M_0 L_1)^n M_0 \varphi. \tag{6.186}$$

Теперь легко записать выражение для тензора S'

$$S' = -\sum_{n=0}^{\infty} \nabla (M_0 L_1)^n M_0 \nabla \sigma', \tag{6.187}$$

и, следовательно, эффективная проводимость имеет вид

$$\sigma^* = \sigma_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \langle \sigma' \nabla (M_0 L_1)^n M_0 \nabla \sigma' \rangle. \tag{6.188}$$

Изложенная процедура в принципе предполагает сходимость ряда возмущений, которая, как показывают исследования, не всегда имеет место. В этом факте заключена причина возможных существенных погрешностей при использовании только первых членов ряда, если возмущения достаточно велики. К этому следует добавить, что с ростом n аналитические трудности при вычислении членов ряда стремительно возрастают, так что на практике приходится ограничиваться вычислением квадратических по флуктуациям σ' членов ($n=0$). В некоторых случаях вычисления удается осуществить и для $n = 1$ и т. д.

Рассмотрим подробнее структуру ряда (6.188). Нетрудно видеть, что первый член ряда ($n = 0$) учитывает парные корреляции случайного поля σ, последующие члены зависят от корреляций более высокого порядка. Из этого следует, что учет конечного числа членов соответствует игнорированию всей совокупности многоточечных взаимодействий, исключая парные, тройные и т. д., в зависимости от числа удержанных членов ряда.

В последнее время получили развитие методы частичного суммирования ряда возмущений, основанные на идее выделения в каждом члене ряда такого слагаемого, которое учитывает специфическое взаимодействие определенного вида, и последующего суммирования ряда, составленного из таких членов. Таким образом осуществляется учет всего многообразия взаимодействий, но

не универсального, а определенного типа, выбор которого связан с анализом структуры оператора M_0L_1 и его степеней.

Действительно, обратившись к операторам M_0 и L_1, отметим, что M_0 — интегральный оператор с ядром — функцией Грина для оператора L_0, а L_1 — дифференциальный оператор второго порядка. Отсюда следует, что перемножение этих операторов приводит к необходимости вычисления вторых производных функции Грина, которые, как известно, имеют формальную, т. е. полученную формальным дифференцированием и сингулярную составляющие. Отбрасывание формальной составляющей — один из возможных путей получения суммируемого ряда, учитывающего многоточечные взаимодействия определенного типа. Такой подход получил название сингулярного приближения [37]. Как отмечено Т. Д. Шермергором [37], принятие предположений о допустимости отбрасывания формальной производной в конечном счете равносильно гипотезе об однородности поля внутри «зерна неоднородности», т. е. фактически сводится к «размазыванию» поля внутри включений. Очевидно, это обстоятельство сближает метод сингулярного приближения с методом самосогласованного поля, в основе которого лежат сходные предположения.

Прежде чем перейти к изложению сингулярного приближения, вернемся к процедуре получения эффективной проводимости в виде ряда (6.188). Очевидно, при этом определенное значение играет разделение оператора L на сумму неслучайного и случайного эллиптических операторов. Хотя выделение оператора $L_0=\nabla\sigma_0\nabla$, где $\sigma_0=<\sigma>$, выглядит естественно, оно не единственно возможное. Напротив, можно ожидать, что при больших флуктуациях σ именно такое расщепление — причина плохой сходимости ряда возмущений. Представляется естественным процедуру расщепления оператора L сделать более гибкой за счет введения в оператор L_0 свободного параметра. Такой метод получил название метода перенормировок [33]. Отметим, что первоначально идеи метода перенормировок развиты в квантовой теории поля, в теории рассеяния волн в средах со случайными неоднородностями [31].

Метод предполагает такую перенормировку разлагаемого в ряд оператора, которая заведомо приводит к более быстрой его сходимости. Так, уже первый член нового разложения является суммой бесконечного числа членов обычного ряда теории возмущений. Как будет показано, аналогичными свойствами обладают и разложения, приводимые далее для задачи об эффективных параметрах. Некоторое отличие методов связано с введением в нашей задаче свободного параметра, разумным выбором которого можно улучшить приближенное решение.

МЕТОД ПЕРЕНОРМИРОВОК И СИНГУЛЯРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Следуя изложению метода перенормировок в работе [33], введем наряду с неограниченной и неоднородной средой случайной проводимости σ аналогичную среду, называемую телом сравнения, для

которой, однако, тензор проводимости σ_c постоянен. Выпишем системы уравнений для обеих сред

$$\vec{v} = \sigma\vec{h}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{h} = 0, \tag{6.189}$$

$$\vec{v}_c = \sigma_c\vec{h}_c, \quad \operatorname{div}\vec{v}_c = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{h}_c = 0, \tag{6.190}$$

и введем потенциалы при помощи равенств

$$\vec{h} = \nabla u, \quad \vec{h}_c = \nabla u_c. \tag{6.191}$$

Очевидно, потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$Lu = 0, \quad L = \nabla\sigma\nabla,$$

$$L_c u_c = 0, \quad L_c = \nabla\sigma_c\nabla. \tag{6.192}$$

Вводя в рассмотрение отклонения функций поля и операторов от их значений в теле сравнения

$$\sigma'' = \sigma - \sigma_c, \ \vec{h}'' = \vec{h} - \vec{h}_c, \ u'' = u - u_c, \ L'' = L - L_c = \nabla\sigma''\nabla,$$

запишем первое уравнение из (6.192) с учетом второго

$$L_c u'' = -L''u. \tag{6.193}$$

Ему эквивалентно интегродифференциальное уравнение

$$u'' = G^* L''u, \tag{6.194}$$

где $*$ — символ свертки, а тензор Грина G — решение уравнения $L_c G = E\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Дифференцируя (6.194), получим

$$\vec{h}''(\vec{r}) = \int \nabla G(\vec{r} - \vec{r}')\, \nabla'\sigma''(\vec{r}')\, \nabla' u(\vec{r}')\, dr'^3. \tag{6.195}$$

Интегрируя (6.195) по частям, с учетом свойства функции Грина $G'_{x_i} = -G'_{x'_i}$, перепишем (6.195) в виде

$$\vec{h}''_i(\vec{r}) = \sum_j \int G''_{x_i x_j}(\vec{r} - \vec{r}')\, \sigma''(\vec{r}')\, \vec{h}_j(\vec{r}')\, dr'^3. \tag{6.196}$$

Как известно, вторую производную тензора Грина можно представить как сумму формальной второй производной и сингулярной части

$$G''_{x_i x_j} = G''^{S}_{x_i x_j} + G''^{I}_{x_i x_j}; \quad \int_{W} G''^{S}_{x_i x_j}\varphi dr'^3 = \varphi(0)\, g_{ij},$$

$$g_{ij} = \int_{S_0} G'_{x_i} dr_j^2; \quad \int_{W} G''_{x_i x_j}\varphi dr^3 = \int_{W_0} G''_{x_i x_j}[\varphi - \varphi(0)]\, dr^3 + \int_{W - W_0} G''_{x_i x_j}\varphi dr^3, \tag{6.197}$$

где $\varphi(r)$ — произвольная финитная и дважды дифференцируемая функция, а объем W_0, ограниченный поверхностью S_0, включает начало координат. Так как G'_{x_i} — однородная обобщенная функция

степени —2, то интеграл g_{ij} зависит лишь от формы элемента объема $W_0 \subset W$, а не от его величины. Далее в качестве W_0 выбирается эффективный элемент неоднородности, т. е. усредненный по ансамблю реализаций элемент неоднородности. Как правило, эффективный элемент неоднородности аппроксимируется эллипсоидом. В этом случае $g = -n\sigma_c^{-1}$, где значение тензора n определено по формулам (6.97), (6.98). Если поле проводимости не содержит включений, а является непрерывным, форму W_0 целесообразно отождествлять с формой корреляционных поверхностей $K(r_1, r_2) = \text{const}$.

Выделив в (6.196) сингулярную часть в соответствии с (6.197), запишем

$$\vec{h}'' = (g + p)\,\sigma''\vec{h}. \tag{6.198}$$

Здесь g — тензор, а p — интегральный оператор с ядром — второй формальной производной тензора Грина. Выделение сингулярной составляющей в ядре оператора (6.196) эквивалентно разделению взаимодействия на локальную и нелокальную составляющие, что отчетливо видно в записи формулы (6.198). Целесообразность такого расчленения взаимодействий в подобных задачах впервые отмечена В. М. Финкельбергом [37].

Для компактности дальнейших выкладок введем в рассмотрение тензор λ

$$\lambda = \sigma''(E - g\sigma'')^{-1} \tag{6.199}$$

и перепишем основное уравнение (6.198) в виде

$$(E - g\sigma'')\vec{h} = (E - p\lambda)^{-1}\vec{h}_c. \tag{6.200}$$

Теперь, определив из (6.200) поле h и усреднив его, найдем

$$\langle\vec{h}\rangle = \langle(E - g\sigma'')^{-1}(E - p\lambda)^{-1}\rangle\vec{h}_c. \tag{6.201}$$

Исключив из (6.200) и (6.201) поле $\vec{h}_c$, получим

$$\vec{h} = (E - g\sigma'')^{-1}(E - p\lambda)^{-1}\langle(E - g\sigma'')^{-1}(E - p\lambda)^{-1}\rangle^{-1}\langle\vec{h}\rangle. \tag{6.202}$$

Формула (6.202) дает точную связь полей $\vec{h}$ и $\langle\vec{h}\rangle$ через параметры основной среды и тела сравнения. При этом очевидно, что зависимость от параметров тела сравнения кажущаяся.

Подставив (6.202) в уравнение $\vec{v} = \sigma\vec{h}$ и усреднив его, получим искомое точное выражение эффективной проводимости σ_*

$$\sigma_* = \langle\sigma(E - g\sigma'')^{-1}(E - p\lambda)^{-1}\rangle\langle(E - g\sigma'')^{-1}(E - p\lambda)^{-1}\rangle^{-1}, \tag{6.203}$$

которое, естественно, также не должно зависеть от σ_c.

Конечно, внешняя простота формулы (6.203) обманчива. Для реализации вычислений σ_* выражения типа $(E - p\lambda)^{-1}$ следует

разложить в ряды, провести усреднения, т. е. в конечном счете получить ряд, содержащий свертки многоточечных корреляций. Для компактной записи этого ряда вводятся операторы

$$R=(E-p\lambda)^{-1}<(E-p\lambda)^{-1}>^{-1}=\lim_{n\to\infty}R_n,\quad R_n=\sum_{k=0}^{n}[(p-<p>)\lambda]^k. \tag{6.204}$$

Тогда

$$\vec{h}_n=A_n<\vec{h}>,\quad \sigma_*^{(n)}=<\sigma A_n>,$$
$$A_n=(E-g\sigma^n)R_n<(E-g\sigma^n)^{-1}R_n>^{-1} \tag{6.205}$$

и формулы (6.202) и (6.203) приобретают вид

$$h=\lim_{n\to\infty}h_n,\quad \sigma_*=\lim_{n\to\infty}\sigma_*^{(n)}. \tag{6.206}$$

Очевидно, точное суммирование такого ряда практически неосуществимо, и потому приходится ограничиваться приближенными вычислениями.

Рассмотрим так называемое сингулярное приближение, сводящееся к игнорированию нелокальных взаимодействий, учитываемых оператором p. Положив в (6.203) формально $p=0$, получим тензор эффективной проводимости в сингулярном приближении

$$\sigma^*=<\sigma(E-g\sigma^n)^{-1}><(E-g\sigma^n)^{-1}>^{-1}. \tag{6.207}$$

Формула (6.207) имеет особенности. Во-первых, в отличие от формулы (6.203) в сингулярном приближении эффективная проводимость зависит от параметра — проводимости тела сравнения σ_c, во-вторых, определенный произвол в выборе объема интегрирования W_0 в формуле (6.197), несущественный в принципе для точного решения (6.203), в случае сингулярного приближения эквивалентен достаточно произвольной фиксации тензора g.

Для более детального исследования зависимости (6.207) введем в рассмотрение постоянный тензор

$$g(b+\sigma_c)=-E. \tag{6.208}$$

Тогда уравнение (6.207) можно записать в виде

$$\sigma_*=<\sigma(b+\sigma)^{-1}><(b+\sigma)^{-1}>^{-1}, \tag{6.209}$$
$$(\sigma_*+b)^{-1}=<(\sigma+b)^{-1}>. \tag{6.210}$$

В обоих случаях зависимость σ_* от b достаточно наглядна. Положив в (6.210) тензор $b=0$, получим

$$\overset{*}{\sigma}_{b=0}=<\sigma^{-1}>^{-1}.$$

Аналогично

$$\overset{*}{\sigma}_{b=\infty}=<\sigma>.$$

Таким образом, при произвольном b или σ_c значения σ_*, даваемые сингулярным приближением, удовлетворяют неравенствам

$$<\sigma^{-1}>^{-1}\leqslant\sigma_*\leqslant<\sigma>. \tag{6.211}$$

Поскольку точное значение σ_* лежит в «вилке» (6.211), существует b или σ_c, для которого формула сингулярного приближения даст точное значение эффективной проводимости.

Рассмотрим в сингулярном приближении формулу (6.202) для поля

$$\vec{h} = (E - g\sigma'')^{-1} < (E - g\sigma'')^{-1} >^{-1} < \vec{h} > . \qquad (6.212)$$

Очевидно, что если σ_c никак не связано с основным полем, принятое приближение равносильно предположению, что поле в данной точке зависит лишь от проводимости σ в той же точке (локальность). Связав же σ_c с каким-либо функционалом над основным полем σ, мы превращаем зависимость (6.212), вообще говоря, в нелокальную, тем сильнее, чем нелокальнее упомянутый функционал. Так, заменив σ_c функционалом — эффективной проводимостью σ_*, мы в рамках сингулярного приближения существенно учитываем нелокальные взаимодействия. При этом, если поле σ кусочно-постоянно, поле $\vec{h}$ и, следовательно, $\vec{v}$ в пределах элемента неоднородности также постоянны.

Рассмотрим пример изотропной системы, состоящей из элементов, по форме близких к шару, проводимости которых с вероятностями P_1 и P_2 принимают значения σ_1 и σ_2. В этом случае эффективный элемент неоднородности — шар и, следовательно, тензоры g и b — шаровые. Легко видеть, что

$$g = -\frac{1}{3\sigma_c}, \quad b = 2\sigma_c.$$

Подставив b в (6.210), получим

$$\frac{1}{\sigma_* + 2\sigma_c} = \frac{P_1}{\sigma_1 + 2\sigma_c} + \frac{P_2}{\sigma_2 + 2\sigma_c}. \qquad (6.213)$$

Как уже утверждалось, выбирая σ_c, можно получить различные решения. Пусть, например, $\sigma_c = \sigma_*$. Нетрудно убедиться, что в этом случае формула (6.213) эквивалентна (6.160), дающей эффективную самосогласованную проводимость рассматриваемой системы. Совершенно аналогично рассматривается и соответствующая плоская задача. В этом случае $g = -1/2\sigma_c$, $b = \sigma_c$, и формула (6.210) имеет вид

$$\frac{1}{\sigma^* + \sigma_c} = \frac{P_1}{\sigma_1 + \sigma_c} + \frac{P_2}{\sigma_2 + \sigma_c}. \qquad (6.214)$$

Положив в формуле (6.214) $\sigma_c = \sigma^*$, приходим к соотношению (6.163), полученному ранее в рамках теории самосогласованного поля.

Пусть теперь $\sigma_c = \sigma_1$. Из (6.213) нетрудно найти

$$\sigma_1 = \sigma_1 + \frac{P_2}{1/(\sigma_2 - \sigma_1) + P_1/3\sigma_1}. \qquad (6.215)$$

Аналогично при $\sigma_c = \sigma_2$

$$\sigma_2^* = \sigma_2 + \frac{P_1}{1/(\sigma_1 - \sigma_2) + P_2/3\sigma_2}. \tag{6.216}$$

Легко убедиться, что такой выбор σ_c определил границы Хашина—Штрикмана [41] для пространственных изотропных композитов. Подробно эти границы рассмотрены далее.

Подставив в (6.214) $\sigma_c = \sigma_1$ и $\sigma_c = \sigma_2$, получим границы Хашина—Штрикмана для плоского изотропного поля. Они отличаются от границ (6.215) и (6.216) лишь тем, что вместо троек во втором слагаемом знаменателя плоской задаче соответствуют двойки.

Как показано А. Г. Фокиным, выбор $\sigma_c = <\sigma^{-1}>^{-1}$ и $\sigma_c = <\sigma>$ также приводит к некоторой «вилке», заключенной внутри границ Хашина—Штрикмана, но не гарантирующей, что точное значение σ^* любой изотропной системы лежит внутри нее.

Случай $\sigma_c = <\sigma>$ интересен и тем, что при таком выборе тела сравнения, решая интегродифференциальное уравнение (6.195) методом итераций без выделения сингулярной части, мы получим ряд теории возмущений (6.188).

Вариант теории самосогласованного поля развит в работе [12]. Для пояснения рассмотрим задачи об эффективной проводимости среды с включениями. Проводимость среды и включений составляет соответственно σ_2 и σ_1. Форма включений, как обычно, считается эллипсоидальной.

В отличие от стандартного варианта теории самосогласованного поля, в котором индивидуальное включение считается погруженным в среду с эффективными свойствами, в данном случае индивидуальное включение принимается погруженным в неограниченную среду, имеющую проводимость матрицы, т. е. σ_2. В этой среде существует некоторое, подлежащее определению, эффективное поле $\vec{H}_*$, вообще говоря, отличное от заданного среднего поля $\vec{H}$. При этом, очевидно, поле внутри включения постоянно

$$\vec{H}^i = \zeta \vec{H}_*, \quad \zeta_{ij} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) n_{ij}}. \tag{6.217}$$

Для определения эффективного поля $\vec{H}_*$ используется условие, требующее равенства среднего поля по всей среде с включениями заданному полю $\vec{H}$. Если P — доля включений, это условие имеет вид

$$P\vec{H}^i + (1 - P)\vec{H}_* = \vec{H} \tag{6.218}$$

и, следовательно,

$$\vec{H}_* = [P\zeta + (1 - P)E]^{-1}\vec{H}. \tag{6.219}$$

Для определения эффективной проводимости используем соотношение

$$\sigma_* \vec{H} = < \sigma \vec{h} >, \tag{6.220}$$

что после подстановки в него равенств (6.217) и (6.219) дает

$$\sigma_* = [P\sigma_1\zeta + (1-P)\sigma_2 E][P\zeta + (1-P)E]^{-1}. \tag{6.221}$$

Пусть, например, включения можно смоделировать шарами и, следовательно, $n_{ii} = 1/3$. Если в двумерном случае включения круговые ($n_{ii} = 1/2$). Тогда из (6.221) следует формула

$$\sigma_* = \sigma_2 + \frac{P}{1/(\sigma_1 - \sigma_2) + (1-P)n_{ii}/\sigma_2}, \tag{6.222}$$

совпадающая с формулами Максвелла (6.112) и (6.113) и с формулой (6.216). Как уже было отмечено, этот результат является одной из вариационных границ Хашина — Штрикмана, который, с другой стороны, можно трактовать как эффективную проводимость в сингулярном приближении при отождествлении проводимости среды сравнения σ_c с проводимостью матрицы σ_2.

Покажем, что и в общем случае сингулярное приближение при $\sigma_c = \sigma_2$ совпадает с (6.222). Для этого обратившись к формуле (6.207) и выразив тензор g через ζ

$$g = -\frac{1}{\sigma_2} n = (\sigma_1 - \sigma_2)^{-1}(E - \zeta^{-1}), \tag{6.223}$$

найдем значение тензора $z = E - g\sigma''$ в подобластях — элементах неоднородности. Легко убедиться, что при $\sigma = \sigma_1$ имеем $z_1 = \zeta^{-1}$, а при $\sigma = \sigma_2$ получим $z_2 = E$. Подставив эти результаты в (6.207), получим соотношение (6.222).

При выводе формулы (6.221) мы полагали, что включения проводимости σ_1 погружены в неограниченную среду проводимости σ_2, в которой существует некоторое эффективное поле. Если считать, что включения проводимости σ_2 погружены в среду проводимости σ_1 и провести аналогичные выкладки, для эффективной проводимости можно получить формулу (6.221), в которой следует заменить $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$ и $P \rightleftarrows (1-P)$, не забыв при этом преобразовать и тензор ζ. Можно показать, что полученная таким образом формула для σ_* эквивалентна формуле сингулярного приближения (6.207), в которой положено $\sigma_c = \sigma_1$. В изотропном случае такой подход даст вторую границу Хашина — Штрикмана.

Таким образом, физически достаточно наглядные предположения, лежащие в основе рассматриваемого варианта теории самосогласованного поля, приводят к тем же результатам, что и сингулярное приближение с фиксированным выбором свойств среды сравнения. Отмечаемая эквивалентность и ее следствие — связь с вариационными границами Хашина — Штрикмана, позволяет дать физическую интерпретацию этих границ и, с другой стороны, показать, что приближение эффективного поля дает границы.

Рассмотрим теперь сингулярное приближение в том случае, когда поле проводимости не содержит отдельных включений, а является непрерывным. Если такое n-мерное поле макроскопически изотропно, для определения σ_* имеем уравнения (6.210) и (6.208), в которых шаровой тензор $g = -1/n\sigma_c$. Поэтому $b = (n-1)\sigma_c$ и уравнение (6.210) имеет вид

$$[\sigma_* + (n-1)\sigma_c]^{-1} = < [\sigma + (n-1)\sigma_c]^{-1} >. \qquad (6.224)$$

Пусть проводимость тела сравнения $\sigma_c = \sigma^*$. В этом случае из (6.224) имеем уравнение для самосогласованной эффективной проводимости

$$\frac{1}{n\sigma^*} = < \frac{1}{\sigma + (n-1)\sigma^*} >. \qquad (6.225)$$

Если рассматривается плоская система, $n = 2$ и из (6.225) следует

$$< \frac{\sigma^* - \sigma}{\sigma^* + \sigma} > = 0. \qquad (6.226)$$

Во втором разделе данной главы было приведено точное значение эффективной проводимости двумерной изотропной непрерывной системы, для которой плотность распределения величины $\varkappa = \ln\sigma - < \ln\sigma >$ является четной функцией $\varkappa$. В этом случае точное значение эффективной проводимости имеет вид

$$\sigma^* = \exp < \ln\sigma >.$$

Покажем, что это точное решение, подставленное в уравнение (6.226) обращает его в тождество.

Используя тождественное выражение

$$\sigma = \exp[\varkappa + < \ln\sigma >]$$

и точное значение σ^*, из (6.226) получим равенство

$$< \frac{1 - e^{-\varkappa}}{1 + e^{-\varkappa}} > = 0, \qquad (6.227)$$

которое, как нетрудно видеть, является тождеством, поскольку осредняемая функция нечетна по $\varkappa$, а плотность распределения $\varkappa$ — четна.

Таким образом, доказано, что точное решение уравнения (6.226) для самосогласованной эффективной проводимости является точным значением эффективной проводимости в случае, рассмотренном в [9]. Полученный результат позволяет сделать вывод, что известные в настоящее время точные решения задачи определения эффективной проводимости неоднородных сред удовлетворяют уравнениям самосогласованного поля. Перечислим их:

1. Слоистые среды. Продольные проводимости равны $\sigma_1^* = \sigma_2^* = < \sigma >$, поперечная — $\sigma_3^* = < \sigma^{-1} >^{-1}$. В шестом разделе данной главы показано, что метод самосогласования дает те же результаты.

2. Плоские изотропные двухкомпонентные системы. Обе компоненты σ_1 и σ_2 занимают в среднем геометрически эквивалентные

подобласти, доля первой компоненты равна P. Эффективная проводимость системы $\sigma^*(P)$. Если рассмотреть систему, в которой доля первой компоненты $1-P$, а эффективная проводимость $\sigma^*(1-P)$, то справедливо уравнение

$$\sigma^*(P)\,\sigma^*(1-P)=\sigma_1\sigma_2.$$

При $P=1/2$ имеем $\sigma^*=\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$. Такие же результаты получены методом самосогласования в шестом разделе данной главы.

3. Плоские непрерывные изотропные системы. Плотность распределения величины $x=\ln\sigma-<\ln\sigma>$ четная функция x. Эффективная проводимость $\sigma^*=\exp<\ln\sigma>$. Этот результат методом самосогласования получен в настоящем разделе.

4. Плоская двухкомпонентная система с тензором эффективной проводимости $\sigma^*_{ik}(P,\sigma_1,\sigma_2)$ порождает дополнительную к себе систему, в которой подобласти проводимости σ_2 в исходной системе заменены точно такими же подобластями, проводимость которых σ_1^2/σ_2. Тензор эффективной проводимости дополнительной системы $\sigma^*_{ik}(P,\sigma_1,\sigma_1^2/\sigma_2)$ связан с $\sigma^*_{ik}(P,\sigma_1,\sigma_2)$ точными соотношениями

$$\sigma^*_{11}(P,\sigma_1,\sigma_2)\,\sigma^*_{22}\left(P,\sigma_1,\sigma_1^2/\sigma_2\right)=\sigma_1^2,$$

$$\sigma^*_{22}(P,\sigma_1,\sigma_2)\,\sigma^*_{11}\left(P,\sigma_1,\sigma_1^2/\sigma_2\right)=\sigma_1^2.$$

В шестом разделе данной главы указан способ доказательства того, что решения метода самосогласованного поля удовлетворяют этим точным соотношениям.

5. Во втором разделе данной главы при рассмотрении точных соотношений для анизотропных двумерных сред было получено равенство (6.77). Нетрудно показать, что в случае, когда изотропные включения с проводимостями σ_1 и σ_2 образуют макроскопически анизотропную среду, системы уравнений для самосогласованных компонент тензоров эффективных проводимостей исходного поля с концентрацией P и штрихованного с концентрацией $(1-P)$ совместны с точным уравнением (6.77). Например, подстановка (6.77) в одно из двух уравнений для исходной среды переводит его во второе уравнение системы для штрихованного поля и наоборот.

6. Наконец, рассматривая уравнение для самосогласованной эффективной проводимости изотропной плоскости с изотропными включениями круговой формы

$$\sum_{i=1}^{3} P_i\,\frac{\sigma_*-\sigma_i}{\sigma_*+\sigma_i}=0,$$

$$\sigma_1=\bar{\sigma},\quad \sigma_2=\sigma,\quad \sigma_3=\bar{\sigma}^2/\sigma,\quad P_3=P_2=P,\quad P_1=1-2P,$$

легко проверить, что точное решение (6.79) обращает его в тождество.

Таким образом, и в этом случае точный результат удовлетворяет уравнению для самосогласованной эффективной проводимости.

ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ СЕТОК

Как известно, систему дифференциальных уравнений переноса при помощи конечно-разностной аппроксимации можно модифицировать в систему алгебраических уравнений, которая, в свою очередь, может интерпретироваться как модель переноса в дискретно-континуальной сеточной системе [27]. Если исходная система имеет переменные коэффициенты, то и проводимость сетки также будет переменной, и, следовательно, можно поставить задачу определения эффективной проводимости сетки.

По принятой традиции дальнейшее изложение будет проводиться в терминах электрического поля и следовать с небольшими отклонениями обзору Киркпатрика [32].

Итак, пусть в пространстве размерности n размещена система узлов, в каждом из которых сходятся m звеньев — связей, проводимость звена, соединяющего узлы i и j суть b_{ij}. Если u_{ij} — разность потенциалов поля между i и j узлами, то для каждого узла j можно написать уравнение сохранения тока

$$\sum_{i}^{m} q_{ij} = 0, \quad q_{ij} = b_{ij} u_{ij}. \tag{6.228}$$

Введя средние силы тока и поля (разность потенциалов между соседними узлами)

$$Q_{ij} = < q_{ij} >, \quad U_{ij} = < u_{ij} >, \tag{6.229}$$

определим эффективную проводимость сетки b^*_{ij} по следующим уравнениям

$$Q_{ij} = b^*_{ij} U_{ij}, \quad \sum_{i}^{m} Q_{ij} = 0. \tag{6.230}$$

Как и для континуальных задач, фундаментальное значение для нахождения приближенных значений b^* имеет задача о поле внутри звена — связи, помещенного в однородную по проводимости бесконечную сетку, при условии, что поле вдали от связи-включения равно u.

Пусть звено — включение AB имеет проводимость b_0, остальные звенья сетки — b, поле u направлено вдоль звена-включения (рис. 41). Если бы все проводимости в сетке были одинаковы, т. е. $b = b_0$, то поле u_0 на AB равнялось бы u. Неравенство проводимостей изменяет поле. Для сохранения силы тока в узлах A и B следует задать силу некоторого фиктивного тока q_0, втекающего в сетку и вытекающего из нее,

$$q_0 = U(b - b_0). \tag{6.231}$$

Этот ток, входя в систему в точке A, частично идет по звену AB, частично проходит по сетке, из которой звено AB исключено

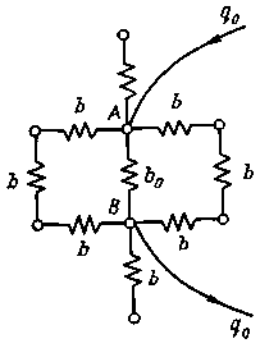
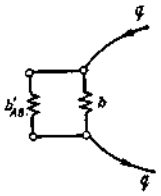


Рис. 41. Фрагмент бесконечной сетки сопротивлений, содержащий включение AB

Рис. 42. Схема сопротивлений, эквивалентная бесконечной сетке с включением



В точке B ток силой q_0 выводится из системы. Очевидно, ток силой q_0 создает на AB дополнительное поле u'

$$u' = q_0 \left(b_0 + b'_{AB}\right)^{-1}, \tag{6.232}$$

где b'_{AB} — проводимость всей сетки с исключенным звеном AB.

Подставив (6.231) в (6.232), получим

$$u' = u\,(b - b_0)\left(b_0 + b'_{AB}\right)^{-1}. \tag{6.233}$$

Следовательно, для определения напряженности дополнительного поля u' остается выразить b'_{AB} через известные параметры задачи.

Киркпатрик [32] приводит остроумный способ определения данной проводимости. Для этого вновь рассматривается та же сетка, но на этот раз все звенья ее одинаковы и имеют проводимость b. В узел A вводится некоторый ток силой q, а в точке B он выводится (рис. 42). Принцип суперпозиции позволяет рассматриваемое поле считать суммой следующих двух полей: 1) ток силой q вводится в точке A, а выводится на бесконечности; 2) ток силой q выводится в точке B, а вводится на бесконечности. И в том и другом случае вследствие симметрии сила тока, протекающего в каждом из m звеньев, сходящихся в A или B, равна q/m, и потому суммарная сила тока через звено AB равна $2q/m$. Отсюда легко подсчитать u_{AB} — разность потенциалов между узлами A и B

$$u_{AB} = 2q/mb. \tag{6.234}$$

С другой стороны

$$u_{AB} = q/b_{AB}, \tag{6.235}$$

где b_{AB} — проводимость всей однородной системы.

Очевидно, что $b_{AB} = b' + b'_{AB}$ и, следовательно, исключив q и u_{AB} из (6.234) и (6.235), получим

$$b_{AB} = b\left(\frac{m}{2} - 1\right). \tag{6.236}$$

Подставив (6.236) в (6.233), найдем искомое соотношение, связывающее дополнительное поле u' и поле на бесконечности u

$$u' = \frac{u(b - b_0)}{b_0 + b\left(\frac{m}{2} - 1\right)}. \tag{6.237}$$

Поскольку в случае пространственной кубической сетки $m = 6$ для плоской квадратной решетки $m = 4$, для одномерной цепи $m = 2$, число $\varkappa = \frac{m}{2} - 1$ в этих случаях равно соответственно 2, 1 и 0. Подсчитав поле на включении $u_{AB} = u + u'$, получим

$$u_{AB} = u\frac{b(\varkappa + 1)}{b_0 + b\varkappa}. \tag{6.238}$$

Отметим, что формула (6.238) совпадает с формулой (6.95), если считать, что $\varkappa = n^{-1} - 1$. Отсюда следует вывод, что поле в звене сетки совпадает с полем во включении, помещенном в неограниченную среду, если в трехмерном пространстве включение — шар, в двумерном — круг, в одномерном — плоский слой, перпендикулярный полю. Располагая (6.238) — решением задачи о поле в единичном включении — звене сетки, можно перейти к задаче вычисления эффективной проводимости сетки. Так, в приближении малой концентрации звеньев-включений P, проводя рассуждения и выкладки целиком аналогичные проделанным в третьем разделе данной главы, получим формулу для эффективной проводимости сетки

$$b^* = b + P(b_0 - b)\frac{b(\varkappa + 1)}{b_0 + b\varkappa}.$$

Очевидно, что при $\varkappa = 2$ (трехмерная кубическая сетка) результат совпадает с формулой (6.104) для сферических включений, при $\varkappa = 1$ наблюдается совпадение с формулой (6.105), соответствующей круговым включениям на плоскости. При $\varkappa = 0$ получается формула, соответствующая линейному по концентрации p разложению в ряд точного решения для одномерного случая.

Совершенно аналогично, как и в шестом разделе данной главы, находятся самосогласованные значения эффективной проводимости сетки. По вполне очевидным причинам при $\varkappa = 2$ получим формулу (6.160), а при $\varkappa = 1$ — формулу (6.163). При $\varkappa = 0$ метод самосогласования даст точный результат.

Вычисление эффективных параметров анизотропных сеток связано с затруднениями, поскольку неизвестно решение фундаментальной задачи о поле в одиночном включении, расположенном в неограниченной анизотропной и однородной сетке.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Достаточно общая процедура вычисления эффективной проводимости связана с применением метода возмущений или перенормировок и приводит к бесконечному ряду, суммирование которого в общем случае представляет собой трудно разрешимую задачу. В большинстве случаев остается открытым вопрос о сходимости ряда теории возмущений, если флуктуации проводимости достаточно велики. Сложность и громоздкость выражений для членов ряда возмущений затрудняют анализ его структуры и выбор методов суммирования ряда. В этом смысле определенные перспективы могут быть связаны с методом Херринга, в соответствии с которым все флуктуирующие функции представляются рядами Фурье и исходные уравнения содержат искомые амплитуды этих разложений. Редукция к нелинейной системе уравнений также приводит к ряду, но, как показано В. А. Кудиновым и Б. Я. Мойжесом [16], структура ряда относительно проста. Ее анализ позволил авторам предложить приемы приближенного суммирования итерационного ряда, приводящие к довольно простым формулам для эффективной проводимости. Этот анализ оказался полезным и для выбора пробных функций при построении вариационных оценок для эффективных характеристик. Далее излагается метод Херринга и результаты его развития в работе [16].

Пусть локальные поля и потоки связаны соотношениями

$$\vec{v} = \sigma\vec{h}, \quad \vec{h} = \rho\vec{v}, \tag{6.239}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{h} = 0. \tag{6.240}$$

Выделим в пространстве некоторую область $\mathbb{V}$, характерные размеры которой значительно больше масштаба неоднородности поля σ и введем средние по объему полей σ, v и h, соответственно σ_0, $\vec{V}$, $\vec{H}$. Эффективная проводимость σ^* и эффективное сопротивление ρ^* определяются из соотношений

$$\vec{V} = \sigma^*\vec{H}, \quad \vec{H} = \rho^*\vec{V}. \tag{6.241}$$

Представим внутри области $\mathbb{V}$ поля σ, $\vec{v}$ и $\vec{h}$ их разложениями в ряд Фурье

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma_0 + \sum_k{}' \sigma_k e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\vec{h}(\vec{r}) = \vec{H} + \sum_k{}' \vec{h}_k e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{V} + \sum_k{}' \vec{v}_k e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{6.242}$$

Штрих у знака суммирования означает, что опущен член $k = 0$. Подставив (6.242) в первое уравнение из (6.239) и осреднив его

по объему с учетом того, что среднее значение $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ при $k \neq 0$ равно нулю, получим

$$\vec{V} = \sigma_0 \vec{H} + \sum_k{}' \sigma_{-k} \vec{h}_k. \tag{6.243}$$

Следовательно, для вычисления при помощи (6.243) эффективной проводимости нужно найти $\vec{h}_k$. Для этого вновь подставим (6.242) в (6.239) и сравнив коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$\vec{v}_k = \sigma_0 \vec{H}_k + \sigma_k \vec{H} + \sum_{k_1 (k_1 \neq k)} \sigma_{k-k_1} \vec{h}_{k_1}. \tag{6.244}$$

Уравнениям (6.240) соответствуют равенства

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_k = 0, \quad \vec{k} \times \vec{h}_k = 0. \tag{6.245}$$

Система (6.244), (6.245) решается методом итераций, для чего в сумме (6.244) в качестве начального приближения принимается $\vec{h}_k = 0$, а для вычисления последующего приближения в сумму подставляется предыдущее. Таким образом

$$\vec{h}_k = -\vec{f}(\vec{f} \cdot \vec{H}) \frac{\sigma_k}{\sigma_0} + \sum_{k_1 \neq k}{}' \vec{f}(\vec{f} \cdot \vec{f}_1)(\vec{f}_1 \cdot \vec{H}) \frac{\sigma_{k-k_1} \sigma_{k_1}}{\sigma_0^2} - \ldots, \tag{6.246}$$

где $\vec{f}_i = \vec{k}_i / |\vec{k}_i|$.

Подставив (6.246) в (6.243) и полагая, что флуктуации изотропны, для трехмерной среды получим

$$\sigma^* = \sigma_0 \left[1 - \frac{1}{3} \sum{}' \frac{\sigma - \sigma_k}{\sigma_0^2} + \frac{1}{3} \sum_{k_1, k (k_1 \neq k)} (\vec{f} \cdot \vec{f}_1)^2 \frac{\sigma - \sigma_k - \sigma_{k-k_1} \sigma_{k_1}}{\sigma_0^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} \sum_{k, k_1, k_2}{}' (\vec{f} \cdot \vec{f}_1)(\vec{f} \cdot \vec{f}_2)(\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2) \frac{\sigma - \sigma_k - \sigma_{k-k_1} \sigma_{k_1 - k_2} \sigma_{k_2}}{\sigma_0^4} + \ldots \right]. \tag{6.247}$$

В двумерном случае перед суммами будет множитель $1/2$.

Сравнивая выражение (6.247) с рядом теории возмущений для σ^* (см. (6.188), можно отметить его относительную простоту. Вместо ряда, содержащего степени интегродифференциальных операторов, свертки функций Грина и т. д., здесь каждый член ряда — сумма произведений двух сомножителей: скалярных произведений базисных векторов и сверток компонент поля σ. Индивидуальность каждого конкретного поля определяется связью этих сверток и взаимным направлением векторов. Если такая связь несущественна, то сумму произведений можно представить как произведение сумм, и ряд (6.247) суммируется в конечном виде. Для этого используется конечное точное решение для одномерного поля и его разложение в ряд, имеющее ту же структуру,

что и ряд (6.247) в предположении о несущественности корреляции между упомянутыми сомножителями. В итоге

$$\sigma^* = \sigma_0 \left\{ 1 - 3 \left[1 - \frac{1}{< 1/\left(1 + \frac{1}{3} \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}\right) >} \right] \right\}, \tag{6.248}$$

$$\rho^* = \rho_0 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{1/\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right) >} \right] \right\}. \tag{6.249}$$

Если предположить, что все $\vec{f}_i$ параллельны, то из (6.247) следует

$$\sigma^* = \frac{2}{3}\sigma_0 + \frac{1}{3}\rho_0^{-1},$$

$$\rho^* = \frac{2}{3}\sigma_0^{-1} + \frac{1}{3}\rho_0. \tag{6.250}$$

Для двумерной среды аналогами формул (6.250) будут

$$\sigma^* = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \rho_0^{-1}),$$

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\sigma_0^{-1} + \rho_0). \tag{6.251}$$

Как указывают авторы [16], случай параллельных $\vec{f}_i$ соответствует стохастической мозаике, сложенной из слоистых элементов. Конечно, такая интерпретация достаточно условна. Очевидно, что если слоистые элементы имеют поперечную проводимость, равную нулю, плоская мозаика в целом будет непроводящей, в то время как формула (6.251) приводит к конечной проводимости. Таким образом, хотя в некоторых случаях удается получить конечные формулы, интерпретация этих случаев недостаточно определенна.

Остановимся на сравнении формулы (6.251) с точным результатом А. М. Дыхне (6.60). В работе [16] указано, что в случае двумерной статистически эквивалентной смеси расхождение между (6.251) и точным решением $\sigma^* = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$ обнаруживается в коэффициентах разложения по моментам, начиная с момента 6-го порядка. И хотя формально это так, тем не менее, формулы (6.251) в случае достаточно сильных неоднородностей малопригодны. Так, если $\sigma_1 = 0$, проводимость смеси $\sigma^* = 0$, в то время как согласно формуле (6.251) она равна $\sigma_2/4$. Можно сравнить формулу (6.251) и с другим точным результатом А. М. Дыхне. Так, если распределение σ логнормально, то согласно [9] имеем

$$\sigma^* = \sigma_0 (1 + \zeta^2)^{-1/2}, \quad \zeta^2 = \frac{<(\sigma - \sigma_0)^2>}{\sigma_0^2}. \tag{6.252}$$

При этих же условиях формула (6.251) имеет вид

$$\sigma^* = \sigma_0 \frac{1 + \zeta^2/2}{1 + \zeta^2}.$$

Разложив теперь оба выражения в ряд по степеням ζ^2, легко обнаружить, что расхождение начинается с коэффициентов при ζ^4.

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Вычисление эффективных проводимостей на основании информации о структуре случайного поля представляет собой сложную задачу. Как было показано, получить ее точное решение удается в исключительных случаях. Затем будет рассмотрена возможность использования вариационных принципов для получения двусторонних оценок эффективных характеристик. Дальнейшее изложение в основном близко к [8, 37, 41].

Определяя скорость возрастания энтропии системы из соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \int_W \frac{\vec{v}\vec{h}}{T} dW, \tag{6.253}$$

где S — энтропия; T — температура; dW — элемент объема, примем, что для истинного распределения поля и потока выражение (6.253) минимально. Если процесс изотермический, то принцип минимального роста энтропии примет вид

$$\delta \int_W \vec{v}\vec{h} dW = 0, \tag{6.254}$$

или

$$\delta \int_W \vec{h}\sigma\vec{h} dW = 0. \tag{6.255}$$

Здесь δ — символ вариации функционала.

Варьирование в (6.255) нужно осуществлять при дополнительном условии $\operatorname{rot}\vec{h} = 0$, при использовании потенциала $p = \vec{r}\vec{H} + \lambda$ варьированию подлежит λ, при условии $<\lambda> = 0$. Поскольку минимальное значение интеграла (6.255) есть энергия, диссипируемая в макроскопическом объеме W, равенству (6.255) соответствует неравенство

$$\vec{H}\sigma^*\vec{H} \leqslant <\vec{h}\sigma\vec{h}> \tag{6.256}$$

или подставляя в (6.256) $\vec{h} = \vec{H} - \nabla\lambda$, получим

$$\vec{H}\sigma^*\vec{H} \leqslant <(\vec{H} - \nabla\lambda)\sigma(\vec{H} - \nabla\lambda)>. \tag{6.257}$$

Выбором пробной функции λ можно получить различные оценки. Пусть $\lambda = 0$, т. е. поле полагается равным среднему. Тогда из (6.257) следует

$$\vec{H}\sigma^*\vec{H} \leqslant <\vec{H}\sigma\vec{H}>, \tag{6.258}$$

или

$$\vec{H}(\sigma^* - <\sigma>)\vec{H} \leqslant 0. \tag{6.259}$$

Поскольку поле $\vec{H}$ произвольно, тензор $(\sigma^* - \langle\sigma\rangle)$ является неположительно определенным, и в этом смысле следует понимать неравенство

$$\sigma^* \leqslant \langle\sigma\rangle. \tag{6.260}$$

Если зафиксирована какая-либо система координат, то выбрав $\vec{H}$ направленным поочередно вдоль осей, можно получить неравенства

$$\sigma^*_{ii} \leqslant \langle\sigma_{ii}\rangle. \tag{6.261}$$

Отметим, что в принципе тензоры σ^* и $\langle\sigma\rangle$ могут иметь разные главные оси и, следовательно, замечание в [8] о неравенствах (6.261) для главных значений, вообще говоря, неточно. Если система макро- и микроизотропна, т. е. σ^* и $\langle\sigma\rangle$ — шаровые тензоры, из (6.259) следует (6.262)

$$\sigma^* \leqslant \langle\sigma\rangle.$$

Запишем вариационный принцип (6.255) в эквивалентной форме

$$\delta \int_W \vec{v}(\sigma^{-1})\vec{v}dW = 0, \tag{6.263}$$

а варьируемый поток, поскольку $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, представим в виде

$$\vec{v} = \vec{V} + \nabla\Psi, \tag{6.264}$$

где $\langle\Psi\rangle = 0$.

Аналогично (6.257) имеем

$$\vec{V}(\sigma^*)^{-1}\vec{V} \leqslant \langle(\vec{V} + \nabla\Psi)\sigma^{-1}(\vec{V} + \nabla\Psi)\rangle. \tag{6.265}$$

В простейшем варианте пробная функция — вектор $\vec{v}$ выбирается в виде $\vec{v} = \vec{V}$. Тогда из (6.265) следует

$$\vec{V}[(\sigma^*)^{-1} - (\langle\sigma^{-1}\rangle)]\vec{V} \leqslant 0. \tag{6.266}$$

Поскольку поток V произволен, тензор $(\sigma^*)^{-1} - \langle\sigma^{-1}\rangle$ является неположительно определенным и в этом смысле следует трактовать неравенство

$$\sigma^* \geqslant \langle\sigma^{-1}\rangle^{-1}. \tag{6.267}$$

В сочетании с (6.260) имеем для σ^* двухстороннюю оценку

$$\langle\sigma^{-1}\rangle^{-1} \leqslant \sigma^* \leqslant \langle\sigma\rangle. \tag{6.268}$$

Этот широко известный результат, интерпретируемый обычно как предельная ситуация слоистой системы при продольном и поперечном движениях, устанавливает для σ^* довольно широкие границы. Очевидно причиной этого является универсальность соотношения, использование только одноточечной информации при игнорировании сведений о геометрии среды. Поскольку оценки

(6.268) физически реализуемы, их улучшение для конкретных систем может быть связано с использованием информации об этих системах. Очевидно, что выбор подходящих пробных функций связан с такой информацией и сопряжен с сужением класса рассматриваемых полей. В работе [3] с этой целью используется приближение метода возмущений и приводятся примеры улучшения границ для эффективных параметров. Однако вычисления в этом случае связаны с информацией о трехточечных корреляциях. Для реальных сред измерения этих корреляций практически отсутствуют.

Идея использовать в качестве пробных функций приближенные решения, удовлетворяющие необходимым ограничениям, реализована во многих работах. В первую очередь, это работа [41]. Обосновав специальный вариационный принцип, ее авторы во многих случаях получили для эффективных параметров границы более узкие, чем (6.268). Позднее Р. Хиллом [37] было доказано, что вариационный принцип Хашина-Штрикмана для задач теории упругости эквивалентен принципам минимума потенциальной и дополнительной энергии. Эквивалентность следует понимать как взаимную выводимость принципов. Для задач переноса принцип Хашина-Штрикмана [41] эквивалентен принципу минимума диссипации энергии. Точное решение соответствующих задач одновременно минимизирует как функционал Хашина-Штрикмана, так и энергетический функционал.

Если в качестве пробной функции использовать приближенное решение, вариационный подход позволяет указать границы для эффективных параметров тем более узкие, чем выше качество приближенного решения. Поэтому естественной выглядит процедура использования приближенных решений метода перенормировок [37], в частности сингулярного приближения. В этих работах показано, что именно сингулярное приближение вектора поляризации фактически использовано Хашиным и Штрикманом при получении границ для эффективных характеристик. Заметим, что использование более высоких приближений, хотя в принципе и должно приводить к сужению «вилки», образованной границами, сопряжено с заданием многоточечных корреляций, информация о которых обычно отсутствует. По-видимому, уместно сделать следующее замечание. Использование в качестве пробных функций некоторых приближенных решений в значительной степени неявно предполагает, что они представляют собой определенный класс функций, так или иначе связанный с основным полем σ. Фактически решается задача оптимизации функционала, когда варьируемые функции принадлежат некоторому классу, который обычно нечетко определен. Естественно, что решение, т. е. границы, найденные в результате оптимизации функционала, зависят от выбора класса пробных функций. Именно поэтому несколько затруднительна трактовка результатов при использовании вариационных методов. Абсолютное значение имеет только «вилка» (6.268), но она, как известно, обычно довольно широка. Как пра-

вило, непросто определить, входит ли поле, соответствующее точному решению той или иной задачи, в класс пробных функций. Обычно ответ на этот вопрос отрицателен, поскольку пробные функции выбираются как можно более простыми, да и к тому же для отыскания функций, близких к точному полю, нужно решить ту трудную задачу, решения которой мы хотим избежать, привлекая вариационные методы.

Приведем основные результаты Хашина — Штрикмана. Рассмотрим некоторые векторные поля: $\tilde{v}$ — бездивергентное, $\tilde{h}$ — безвихревое

$$\operatorname{div} \tilde{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \tilde{h} = 0, \tag{6.269}$$

определенные в области, занятой неоднородной средой. Наряду с этими полями рассмотрим поля $\vec{v}_c$ и $\vec{h}_c$, определенные в той же области пространства, также соответственно бездивергентное и безвихревое, связанные соотношением

$$\vec{v}_c = \sigma_c \vec{h}_c. \tag{6.270}$$

где σ_c — проводимость тела сравнения, считающегося однородным.

Поскольку поля $\tilde{h}$ и $\vec{h}_c$ безвихревые, они имеют потенциалы $\tilde{\varphi}$ и φ_c

$$\tilde{h} = -\nabla \tilde{\varphi}, \quad \vec{h}_c = -\nabla \varphi_c. \tag{6.271}$$

Положим эти потенциалы на границе тел одинаковыми

$$\tilde{\varphi}|_S = \varphi_c|_S \tag{6.272}$$

и рассмотрим поле $\tilde{\tau}$, определенное как

$$\tilde{\tau} = \tilde{v} - \sigma_c \tilde{h}. \tag{6.273}$$

Вводя также поле $\vec{h}''$ и потенциал φ''

$$\vec{h}'' = \tilde{h} - \vec{h}_c, \quad \varphi'' = \tilde{\varphi} - \varphi_c, \tag{6.274}$$

выпишем функционал Хашина — Штрикмана

$$U_{\tilde{\tau}} = \frac{1}{8\pi} \int_W [\sigma_c \vec{h}_c^2 - (\sigma - \sigma_c)^{-1} \tilde{\tau}^2 + 2\tilde{\tau}\vec{h}_c + \tilde{\tau}\vec{h}''] dW \tag{6.275}$$

и очевидные условия, накладываемые на $\tilde{\tau}$ и φ''

$$\sigma_c \operatorname{div} \vec{h}'' + \operatorname{div} \tilde{\tau} = 0, \tag{6.276}$$

$$\varphi''|_S = 0. \tag{6.277}$$

В работе [41] показано, что функционал $U_{\underset{\tau}{\sim}}$ стационарен, если

$$\tilde{\tau} = (\sigma - \sigma_e)\,\tilde{h}, \tag{6.278}$$

и достигает при этом минимума, если $\sigma < \sigma_e$ и максимума при $\sigma > \sigma_e$. Очевидно, условие (6.278) эквивалентно уравнению $\tilde{v} = \sigma\tilde{h}$, которое вместе с (6.269) дает полную систему уравнений, определяющих истинные поток и поле в неоднородной среде. Как уже говорилось ранее, U — стационарное значение функционала (6.275), представляет собой истинное значение энергии, диссипируемой в объеме, которое, в соответствии с вариационным принципом и выбранным σ_e больше или меньше, чем значение функционала, определенного на произвольных пробных полях $\tilde{\tau}$ и $\tilde{h}$, связанных соотношениями (6.269), (6.271) — (6.273)

$$U \lesseqgtr U_{\underset{\tau}{\sim}}, \quad U = \sigma^* \tilde{h}_e^2 W. \tag{6.279}$$

Уместно подчеркнуть, что эти условия требуют, чтобы пробное поле $\tilde{h}$ имело непрерывный и по крайней мере кусочно-дифференцируемый потенциал $\tilde{\varphi}$. Идея метода Хашина — Штрикмана состоит в том, чтобы выбором пробных полей в некотором классе найти экстремум функционала $U_{\underset{\tau}{\sim}}$ и тем самым получить границу для энергии, диссипируемой полями данного класса. Имея границу для энергии, нетрудно установить границу для эффективной проводимости. Рассмотрим, как эта идея реализуется в случае системы, состоящей из n *однородных компонентов, объемные доли которых* P_i. Хашин и Штрикман полагают, что класс пробных полей $\tilde{\tau}$ можно принять кусочно-постоянным, т. е. считать постоянным внутри каждой компоненты неоднородной среды. Формально это предположение можно записать следующим образом:

$$\tilde{\tau} = \tilde{h}_e \sum \tau_i \chi_i, \tag{6.280}$$

где τ_i — постоянные, а индикаторные функции определены как

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in W_i \\ & , \quad < \chi_i > = P_i. \\ 0, & \vec{r} \bar{\in} W_i \end{cases} \tag{6.281}$$

При этом в соответствии с (6.276) поле $\tilde{h}$ может иметь непрерывный и кусочно-дифференцируемый потенциал, так как $\operatorname{div} \tilde{\tau}$ порождает на границах разделов компонент интегрируемые сингулярности и, следовательно, такой выбор пробных полей $\tilde{\tau}$ и $\tilde{h}$ до-

пустим. Уместно подчеркнуть, что хотя поле $\tilde{\tau}$ при таком выделении класса является конечномерным, поле $\tilde{h}$, вообще говоря, бесконечномерно.

Учитывая кусочную однородность $\tilde{\tau}$, перепишем (6.275)

$$\frac{8\pi U}{W}\tilde{\tau} = \sum_{i=1}^{n}\left[\sigma_c \vec{h}_c^2 - \frac{\tau_i^2}{\sigma_i - \sigma_c} + 2\tau_i \vec{h}_c^2\right] P_i + \frac{1}{W}\int_W \tilde{\tau}\vec{h}''\, dW. \quad (6.282)$$

Для того чтобы в (6.282) провести варьирование по τ_i, поле $\vec{h}''$ следует выразить через $\tilde{\tau}$ и вычислить интеграл в правой части. Для этого используем уравнение (6.276) и разложим поле $\tilde{\tau}$ и потенциал φ'' в ряд Фурье

$$\tilde{\tau} = <\tilde{\tau}> + \sum_k{}' \tilde{\tau}_k e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (6.283)$$

$$\varphi'' = \sum_k{}' \varphi_k e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (6.284)$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что суммирование осуществляется по всем значениям волнового вектора, исключая $\vec{k} = 0$. Кроме того, поскольку поле $\tilde{\tau}$ действительно, комплексные амплитуды $\tilde{\tau}_k$ связаны соотношением

$$\tilde{\tau}_k = \bar{\tilde{\tau}}_{-k}, \quad (6.285)$$

где черта над $\tilde{\tau}$ означает комплексную сопряженность.

Подставив разложения (6.283), (6.284) в уравнение (6.276), найдем

$$\varphi_k = -i\frac{(\vec{k}\tilde{\tau}_k)}{\sigma_c k^2}, \quad (6.286)$$

а подставив разложения в интеграл из (6.282) и использовав (6.285), получим

$$J = \frac{1}{W}\int_W (\tilde{\tau}\vec{h}'')\, dW = -\frac{1}{\sigma_c}\sum_k{}' (\vec{k}\tilde{\tau}_k)\,\overline{(\vec{k}\tilde{\tau}_k)}\,\frac{1}{k^2}. \quad (6.287)$$

Заменим в (6.287) суммирование интегрированием в трехмерном пространстве и введем сферическую систему координат. Тогда

$$J = -\frac{1}{\sigma_c}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (\vec{k}\tilde{\tau}_k)\,\overline{(\vec{k}\tilde{\tau}_k)}\sin\Psi d\Psi d\varphi dk. \quad (6.288)$$

Предполагая распределение областей неоднородности изотропным, интеграл (6.288) вычислим следующим образом. Представим поле

в виде $\tilde{\tau}_k = \tilde{\tau}'_k + i\tilde{\tau}''_k$ и подставим в (6.288) Тогда интеграл примет вид

$$J = -\frac{1}{\sigma_c}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{(\vec{k}\tilde{\tau}'_k)^2 + (\vec{k}\tilde{\tau}''_k)^2\}\sin\Psi d\Psi d\varphi dk, \qquad (6.289)$$

и поскольку векторы $\tilde{\tau}'_k$ и $\tilde{\tau}''_k$ коллинеарны вектору $\vec{h}_c$, выражение в фигурных скобках можно переписать в виде

$$\{(\vec{k}\tilde{\tau}'_k)^2 + (\vec{k}\tilde{\tau}''_k)^2\} = \vec{k}^2(\tilde{\tau}'^2_k + \tilde{\tau}''^2_k)\cos^2\Psi \qquad (6.290)$$

при условии, что полярная ось сферической системы координат совмещена с вектором $\vec{h}_c$. Подставив (6.290) в (6.289) и учитывая, что $(\tilde{\tau}'^2_k + \tilde{\tau}''^2_k)$ в изотропной среде не зависит от углов, получим

$$J = -\frac{4\pi}{3\sigma_c}\int_0^{\infty}(\tilde{\tau}_k\bar{\tau}_k)\,k^2dk. \qquad (6.291)$$

С другой стороны, аналогичные преобразования приводят к соотношению

$$<\tilde{\tau}^2> = \frac{1}{W}\int_W \tilde{\tau}^2 dW = <\tilde{\tau}>^2 + 4\pi\int_0^{\infty}(\tilde{\tau}_k\bar{\tau}_k)\,k^2dk. \qquad (6.292)$$

Сравнив (6.291) и (6.292), найдем

$$J = -\frac{1}{3\sigma_c}[<\tilde{\tau}^2> - <\tilde{\tau}>^2]. \qquad (6.293)$$

Используя условие кусочного постоянства $\tilde{\tau}$, из (6.280) и (6.281) получим

$$<\tilde{\tau}> = \vec{h}_c\sum\tau_i P_i, \qquad (6.294)$$

$$<\tilde{\tau}^2> = \vec{h}_c^2\sum_i\tau_i^2 P_i. \qquad (6.295)$$

Подставив (6.293), (6.294) и (6.295) в функционал (6.282), запишем

$$\frac{8\pi U}{W h_c^2} = \sigma_c + \sum_i\left[2\tau_i - \frac{\tau_i^2}{\sigma_i - \sigma_c}\right]P_i - \frac{1}{3\sigma_c}\left\{\sum_i P_i\tau_i^2 - \left[\sum\tau_i P_i\right]^2\right\}. \qquad (6.296)$$

Таким образом, в рамках сделанных предположений о кусочной однородности поля $\tilde{\tau}$ и изотропии неоднородной среды функционал Хашина — Штрикмана является квадратичной формой параметров τ_i. Для оптимизации продифференцируем (6.296) по τ_i и приравняем производные нулю. Тогда

$$\tau_i = \frac{1 + <\tau>/3\sigma_c}{(\sigma_i - \sigma_c)^{-1} + (3\sigma_c)^{-1}}, \quad <\tau> = \Sigma\tau_i P_i. \qquad (6.297)$$

Из (6.297) следует

$$< \tau > = \frac{A}{1 - \alpha A}, \quad A = \sum_i P_i [(\sigma_i - \sigma_c)^{-1} + (3\sigma_c)^{-1}]^{-1}, \quad \alpha = (3\sigma_c)^{-1}. \tag{6.298}$$

Подставив (6.297) и (6.298) в функционал (6.296) и учитывая (6.279), получим для σ^* границы:

верхнюю

$$\sigma^* \leqslant \sigma_c + \frac{A}{1 - \alpha A}, \text{ если } \sigma_c \leqslant \sigma_i; \tag{6.299}$$

нижнюю

$$\sigma^* \geqslant \sigma_c + \frac{A}{1 - \alpha A}, \quad \text{если} \quad \sigma_c \geqslant \sigma_i. \tag{6.300}$$

Пусть множество σ_i упорядочено таким образом, что

$$\sigma_1 = \min_i \sigma_i, \quad \sigma_n = \max_i \sigma_i. \tag{6.301}$$

Тогда верхняя граница будет оптимальной, если в (6.299) положить $\sigma_c = \sigma_1$. Соответственно для получения оптимальной нижней границы следует в (6.300) положить $\sigma_c = \sigma_n$. Полученные таким образом границы и образуют вилку Хашина — Штрикмана.

Выпишем выражения границ Хашина — Штрикмана для изотропной двухфазной системы $\sigma = \sigma_1, \sigma_2$, где $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$

$$\sigma_1 + \frac{P_2}{\frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} + \frac{P_1}{3\sigma_1}} \leqslant \sigma^* \leqslant \sigma_2 + \frac{P_1}{\frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} + \frac{P_2}{3\sigma_2}}. \tag{6.302}$$

Границы для двухфазных изотропных систем на плоскости можно получить аналогично, их вид совпадает с формулой (6.302), лишь следует тройки в знаменателях заменить двойками. Вилку Хашина — Штрикмана будем называть вилкой II.

Согласно [20] вилка II для двумерных (плоских) изотропных систем является точной. Более того, точной является в случае двух измерений следующая вилка для произвольной анизотропной системы:

$$\frac{\sigma_1^2}{< \sigma^{-1} >^{-2}} \leqslant \frac{(\sigma_1^* - < \sigma >)(\sigma_2^* - < \sigma >)}{(\sigma_1^* - < \sigma^{-1} >^{-1})(\sigma_2^* - < \sigma^{-1} >^{-1})} \leqslant \frac{\sigma_2^2}{< \sigma^{-1} >^{-2}}, \tag{6.303}$$

где σ_1^*, σ_2^* — компоненты тензора эффективной проводимости, приведенного к главным осям.

Для доказательства точности вилки достаточно показать, что существуют конкретные плоские двухфазные системы, для эффективных проводимостей которых последние неравенства обращаются в равенства.

В самом деле, образуем слоистую структуру A, слои которой имеют проводимости σ_1 и σ_2. Если q — концентрация слоев

с проводимостью σ_2, то продольная и поперечная эффективные проводимости слоистой структуры будут следующими:

$$\tilde{\sigma}_1^* = (1-q)\,\sigma_1 + q\sigma_2; \tag{6.304}$$

$$\tilde{\sigma}_2^* = [(1-q)\,\sigma_1^{-1} + q\sigma_2^{-1}]^{-1}.$$

Если теперь из только что созданной слоистой системы образовать новые слои — полосы, ортогональные к первоначальным, а их, в свою очередь, с концентрацией ν перемешать со слоями проводимости σ_1, то эффективная продольная и поперечная проводимости системы B при условии, что в полосах из системы A элементарные неоднородности образуют бесконечно тонкие полоски, составят соответственно

$$\sigma_1^* = \nu[(1-q)\,\sigma_1^{-1} + q\sigma_2^{-1}]^{-1} + (1-\nu)\,\sigma_1,$$

$$\sigma_2^* = \{\nu[(1-q)\,\sigma_1 + q\sigma_2]^{-1} + (1-\nu)\,\sigma_1^{-1}\}^{-1}. \tag{6.305}$$

Исключив из σ_1^* и σ_2^* параметры q и ν, связанные очевидным соотношением $q\nu = P$, получим выражение, обращающее левое неравенство (6.303) в равенство. Аналогично доказывается точность правого неравенства (6.303). Легко убедиться, что для макроскопически изотропных систем ($\sigma_1^* = \sigma_2^*$) эта процедура доказывает точность границ Хашина — Штрикмана.

Обратившись к формулам (6.215) и (6.216), нетрудно убедиться, что границы (6.302) получаются, если в формулу для сингулярного приближения эффективной проводимости подставить вместо σ_c поочередно σ_1 и σ. Напомним, что границы Хашина — Штрикмана реализуются и в приближении эффективного поля.

Рассмотрим подробнее связь метода Хашина — Штрикмана с методом и результатами сингулярного приближения. Нетрудно убедиться, что соотношение (6.297) для оптимального поля $\tilde{\tau}$ можно переписать в виде

$$\tilde{\tau} = (\sigma - \sigma_c)\,\vec{h}_s, \quad \vec{h}_s = (\sigma + 2\sigma_c)^{-1} < (\sigma + 2\sigma_c)^{-1} >^{-1} \vec{h}_c. \tag{6.306}$$

Сравнив (6.306) с (6.212), можно увидеть, что $\vec{h}_s$ — в точности совпадает с полем в сингулярном приближении, если принять в (6.212) $g = -1/3\sigma_c$. Поле $\vec{h}_s$, как и $\tilde{\tau}$, является кусочно-постоянным и зависит в пределах фиксированного включения лишь от проводимости этого же включения. Существенно и то, что во всех включениях поле $\vec{h}_s$ коллинеарно полю $\vec{h}_c$. Естественно, что такое поле не может иметь непрерывного потенциала и, следовательно, не может входить в класс пробных полей. Очевидно, допустимое пробное поле $\tilde{h}$, порождаемое кусочно-постоянным полем $\tilde{\tau}$, в соответствии с (6.306) и (6.274), (6.276), (6.277) не будет кусочно-постоянным, а потому пространство пробных полей $\tilde{h}$ будет бесконечномерным.

Таким образом, если в сингулярном приближении поля $\vec{v}$, $\vec{h}$ и, как следствие, $\vec{\tau}$ являются кусочно-постоянными, вариационный метод построения границ, развитый Хашиным и Штрикманом, предполагает кусочное постоянство только поля $\vec{\tau}$. К сожалению, остается неясным, насколько широк класс полей, для которых такая аппроксимация пробных полей $\vec{\tau}$ допустима. Можно лишь утверждать, что не существует реальных изотропных полей, для которых поле $\vec{\tau}$ внутри включения постоянно. Исключением в данном случае является единственное изолированное включение в виде эллипсоида, находящееся в неограниченной однородной среде. Как известно, поля $\vec{v}$, $\vec{h}$ и, следовательно, $\vec{\tau}$ внутри такого включения постоянны. Однако вне включения они переменны. Лишь специальный выбор σ_0 позволяет получить кусочно-постоянное поле $\vec{\tau}$ в случае одного включения. Очевидно, если включение не единственно, истинное поле $\vec{\tau}$ внутри включений не постоянно. Отсюда следует вывод, что среди систем со многими включениями отсутствуют системы, для которых реализуется точно предположение о кусочном постоянстве поля $\vec{\tau}$. Поэтому нельзя быть уверенным, что границы Хашина — Штрикмана физически реализуемы, как это имеет место, например, в случае вилки I или вилки II для двумерных сред. Это обстоятельство делает в принципе возможным сужение вилки Хашина — Штрикмана для трехмерных неоднородных систем.

Хотя метод Хашина — Штрикмана не дает ответа на вопрос: каковы точные границы для эффективной проводимости любых изотропных сред, вилку, даваемую методом, можно считать приближенной и использовать для оценок, не требующих большой точности. Располагая вилкой (σ^-, σ^+), можно, если это необходимо, конструировать приближенные решения. В работе [37] даются такие рекомендации.

Если связность компонентов одинакова, то в качестве приближенного значения σ^* можно взять

$$\sigma^* = [\sigma^+(P) + \sigma^-(P)]/2.$$

Для изотропных матричных смесей рекомендуется принять $\sigma^* = \sigma^+(P)$, если проводимость матрицы больше проводимости включений, и $\sigma^* = \sigma^-(P)$ в противном случае. Если ни один из компонентов не является односвязным, но связности их различны, для оценки σ^* можно принять $\sigma^* = [\sigma^+(P)\,\sigma^-(P)]^{1/2}$.

На рис. 43—50 представлены вилки I и II для двухфазных двумерных и трехмерных систем проводимости $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_2 = 1$ в зависимости от $P_2 = P$, изменяющемся в интервале $0 \leqslant P \leqslant 1$. На этих же рисунках штрих-пунктиром нанесены результаты расчета самосогласованной эффективной проводимости. Нетрудно проследить следующую тенденцию. Если неоднородность не

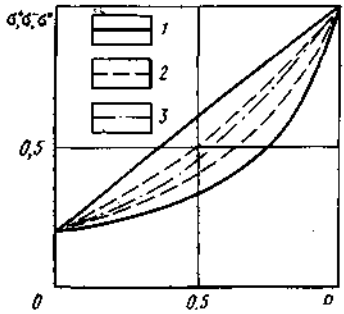


Рис. 43. Вариационные границы эффективной проводимости ($\sigma = 0{,}2$).

1 — границы I; *2* — границы II; *3* — самосогласованная эффективная проводимость

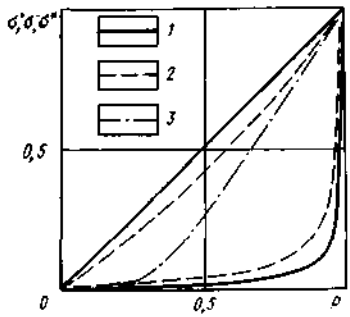


Рис. 45. Вариационные границы эффективной проводимости изотропной двухфазной плоской системы ($\sigma = 10^{-2}$).

1 — 3 — см. обозначения рис. 43

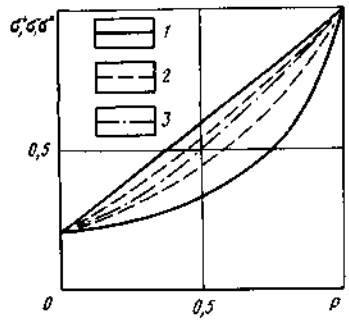


Рис. 47. Вариационные границы эффективной проводимости изотропной двухфазной трехмерной системы ($\sigma = 0{,}2$).

1—3 — см. обозначения рис. 43

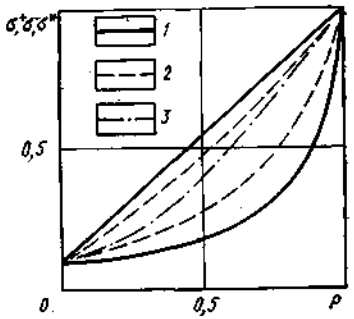


Рис. 44. Вариационные границы эффективной проводимости изотропной двухфазной плоской системы ($\sigma = 10^{-1}$).

1 — 3 — см. обозначения рис. 43

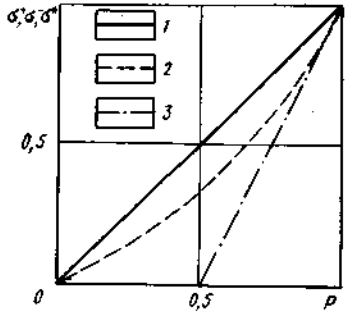


Рис. 46. Вариационные границы эффективной проводимости изотропной двухфазной плоскости системы ($\sigma = 10^{-3}$).

1—3 — см. обозначения рис. 43

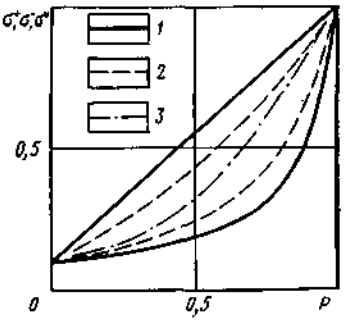


Рис. 48. Вариационные границы эффективной проводимости изотропной двухфазной трехмерной системы ($\sigma = 10^{-1}$).

1—3 — см. обозначения рис. 43

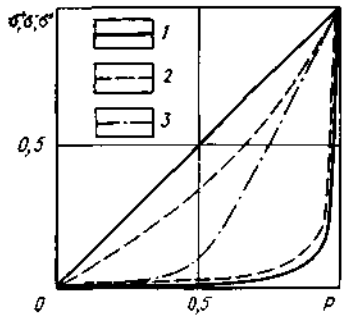


Рис. 49. Вариационные границы эффективной проводимости изотропной двухфазной трехмерной системы ($\sigma = 10^{-2}$).

1—3— см. обозначения рис. 43

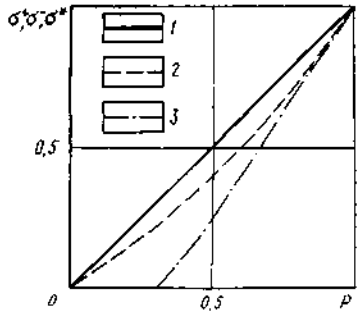


Рис. 50. Вариационная граница (верхняя) эффективной проводимости изотропной двухфазной трехмерной системы ($\sigma = 10^{-3}$).

1—3— см. обозначения рис. 43

очень сильна ($\sigma > 0{,}1$), вилка II оказывается существенно уже вилки I. При сильной неоднородности границы, даваемые обеими вилками, очень широки. Очевидно, как и должно быть в соответствии с теорией, самосогласованная эффективная проводимость лежит внутри вилок I и II. В самом деле, для получения самосогласованной эффективной проводимости в формулах сингулярного приближения метода перенормировок следует положить $\sigma_c = \sigma^*$. Но так как $\sigma_1 \leqslant \sigma^* \leqslant \sigma_2$, то выбранное таким способом тело сравнения заключено между двумя телами сравнения проводимостей σ_1 и σ_2, определяющими вилку II, лежащую внутри вилки I.

Интересный способ установления верхней границы для эффективной проводимости развит С. Прагером [46], изучившим макроскопически изотропные системы с включениями нулевой проводимости. Приведем основные этапы рассуждений Прагера и окончательные результаты его анализа.

Пусть $z(\vec{r})$ — индикаторное случайное поле, равное нулю внутри включений и единице вне их. Очевидно, $< z > = P$ (доле проводящей области), а для момента

$$S(\vec{\rho}) = < z(\vec{r})\, z(\vec{r} + \vec{\rho}) > \tag{6.307}$$

имеют место предельные соотношения

$$S(0) = P, \quad S(\infty) = P^2. \tag{6.308}$$

Будем искать минимум энергетического функционала

$$E = <\vec{h}\sigma\vec{h}>, \tag{6.309}$$

где

$$\sigma = \sigma_0 z, \tag{6.310}$$

а пробные поля $\vec{h}$ имеют непрерывный потенциал и удовлетворяют условию $<\vec{h}>=\vec{H}$.

Представив $\vec{h}$ в виде

$$\vec{h}=\vec{H}+\tilde{h},\quad <\tilde{h}>=0, \tag{6.311}$$

запишем энергетический функционал (6.309) в форме

$$E=\sigma_0\,[PH^2+2\vec{H}<z\tilde{h}>+<\tilde{h}z\tilde{h}>]. \tag{6.312}$$

Если $\tilde{h}$ — некоторое пробное поле, а $\lambda=\text{const}$, то поле $\lambda\tilde{h}$ также может быть пробным, и, следовательно, параметр λ можно выбрать оптимально. Для этого в (6.312) вместо $\tilde{h}$ подставим $\lambda\tilde{h}$ и продифференцируем функционал по λ. Приравняв результат нулю, найдем оптимальное λ

$$\lambda=-\vec{H}<z\tilde{h}>/<z\tilde{h}^2>. \tag{6.313}$$

Подставив найденное λ в функционал, получим оптимальное значение энергетического функционала для данного класса пробных полей $\tilde{h}$

$$E=\sigma_0H^2\left[P-\frac{(\vec{H}<z\tilde{h}>)^2}{H^2<z\tilde{h}^2>}\right]. \tag{6.314}$$

Согласно вариационному принципу минимума диссипируемой энергии истинная средняя энергия не превосходит пробной, следовательно

$$\sigma^*\leqslant\sigma_0\left[P-\frac{(\vec{H}<z\tilde{h}>)^2}{H^2<z\tilde{h}^2>}\right]. \tag{6.315}$$

Из (6.315) вытекает сразу, что при любом пробном поле $\tilde{h}$ имеем $\sigma^*\leqslant\sigma_0P=<\sigma>$ и для уточнения неравенства нужно класс пробных полей связать с полем-индикатором $z(\vec{r})$. С. Прагер [46] выбирает поле $\tilde{h}$ в классе линейных функционалов над полем z

$$\tilde{h}(\vec{r})=\nabla\int\mu(\vec{\rho})\,[z(\vec{r})-P]\,d\rho^3, \tag{6.316}$$

где $\mu(\vec{\rho})$ — неслучайная весовая функция, варьируя которую, будем искать оптимум энергетического функционала (6.314). Нетрудно видеть, что хотя поле-индикатор разрывно, поле $\tilde{h}$ имеет непрерывный потенциал и, кроме того, $<\tilde{h}(\vec{r})>=0$. Таким образом, поле (6.316) является допустимым.

Проводя стандартную процедуру варьирования функционала (6.314) на полях (6.316), можно установить связь оптимальной весовой функции μ от двух-и трехточечных корреляционных моментов поля z. Эта связь имеет вид интегрального уравнения Фредгольма первого рода и в принципе позволяет при известных корреляциях найти оптимум энергии, а с ним и оценку для σ^*. К сожалению, отсутствие информации о трехточечных корреляциях не позволяет реализовать этот путь до конца. Выход заключается в дополнительном приближении, состоящем в том, что неравенство (6.315) усиливается, если провести замену $\langle z\tilde{h}^2\rangle = \langle\tilde{h}^2\rangle$. Тогда

$$\sigma^* < \sigma_0\left[P - \frac{(\vec{H}\langle z\tilde{\vec{h}}\rangle)^2}{H^2\langle\tilde{h}^2\rangle}\right]. \tag{6.317}$$

Для минимизации энергетического функционала решается соответствующее уравнение Эйлера — Лагранжа, находятся оптимальная весовая функция $\mu(\vec{\rho}) = \vec{H}\vec{\rho}/4\pi\rho^3$, оптимальная энергия и, в конечном счете, оценка для эффективной проводимости

$$\sigma^* < \sigma_0 P(2+P)/3. \tag{6.318}$$

Нетрудно убедиться, что эта оценка несколько выше верхней границы Хашина — Штрикмана.

Завершая изложения вариационных методов, остановимся на применении метода Херринга (см. десятый раздел данной главы) для непосредственного получения вариационных оценок эффективных характеристик [16].

Определим эффективную проводимость σ^* из соотношения

$$\sigma^* = E_{\min}/H^2, \tag{6.319}$$

где в соответствии с (6.243), (6.244) и (6.245)

$$E = \sigma_0 H^2 + 2\sum_k{}'\sigma_{-k}\vec{h}_k\vec{H} + \sigma_0\sum_k{}'\vec{h}_k^2 + \sum_{k,k_1}\sigma_{k-k_1}\vec{h}_{k_1}\vec{h}_{-k}. \tag{6.320}$$

Если вместо $\vec{h}_k$ подставить в (6.320) ряд (6.246), то в соответствии с вариационным принципом получим $E_{\min}$.

Подстановка любого другого допустимого разложения даст $E \geqslant E_{\min}$ и, следовательно, согласно (6.319) мы получим для σ^* оценку сверху $\sigma_+^* \geqslant \sigma^*$. Так, выбрав в качестве пробной функции выражение, пропорциональное первому члену разложения (6.246)

$$\vec{h}_k = a\vec{f}(\vec{f}\vec{H})\sigma_k, \tag{6.321}$$

и варьируя a для минимизации E, авторы [16] получают

$$\sigma_+^* = \sigma_0 - \frac{1}{3}\frac{\langle(\sigma-\sigma_0)^2\rangle}{\sigma_0 + J/\langle(\sigma-\sigma_0)^2\rangle}, \quad J \cong \frac{1}{3}\langle(\sigma-\sigma_0)^3\rangle. \tag{6.322}$$

Задав средний поток и использовав ту же процедуру, получим оценку снизу

$$\overset{\cdot}{\sigma}_{-} = \left\{\rho_0 - \frac{2}{3}\frac{<(\rho-\rho_0)^2>}{\rho_0 + J_1/<(\rho-\rho_0)^2>}\right\}^{-1}, \quad J_1 \cong \frac{2}{3} <(\rho-\rho_0)^3>. \tag{6.323}$$

Итак, $\overset{\cdot}{\sigma}_{-} \leqslant \sigma^* \leqslant \overset{\cdot}{\sigma}_{+}$ и, как доказано в [16], эта двусторонняя оценка полностью совпадает с оценкой М. Дж. Берана [3], полученной, как известно, при использовании в качестве пробных функций членов ряда возмущений. Как показано в [16], вариационные оценки $\overset{\cdot}{\sigma}_{+}$ и $\overset{\cdot}{\sigma}_{-}$ в случае двухкомпонентной смеси точно совпадают с результатами, даваемыми формулами (6.248) и (6.249), т. е. приближенное суммирование ряда (6.247) дает оценку сверху, а соответствующего ряда при вычислении ρ^* дает для σ^* оценку снизу.

Ограничиваясь на этом рассмотрением вариационных принципов, отметим в заключение их достоинства и недостатки. Вариационные оценки основаны на универсальных принципах и относительно просты при использовании минимальной информации о рассматриваемых системах, т. е. фактически при рассмотрении широкого класса объектов. Но в этом же и причина ограниченной эффективности вариационных оценок, поскольку широта класса приводит к широким «вилкам» для эффективной проводимости. Включение в анализ более детальной информации о специфических особенностях рассматриваемых конкретных систем резко увеличивает трудности, делая метод недостаточно конструктивным.

ГЛАВА 7

ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПРИ ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПЕРЕНОСЕ МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Различные и наиболее важные приложения теории фильтрации связаны с проблемой описания и гидродинамического анализа совместного движения нескольких жидкостей и газов в пористой среде. По установившейся традиции, не совсем точно с точки зрения термодинамики, различные жидкости или газы принято называть фазами, а их фильтрацию — многофазной. Принято также, конечно условно, подразделять фазы на смешивающиеся и несмешивающиеся. Например, обычно считают, что водонефтяные системы состоят из несмешивающихся фаз — нефти и воды.

Описание процесса многофазной фильтрации методами механики сплошных сред — весьма сложная задача, поскольку многообразие форм сосуществования жидких фаз, их сильное

взаимодействие между собой и с твердой поверхностью породы требует учета множества физических, физико-химических и геометрических факторов. Упоминая о сложности учета геометрического фактора, мы имеем в виду трудности описания и адекватного отражения в математической модели чрезвычайно сложного распределения жидких фаз в поровом пространстве, описание которого, в свою очередь, также является трудной задачей. Определенные перспективы построения эффективного аппарата для решения этих проблем можно связывать с методами стохастической интегральной геометрии.

Общепринятые уравнения фильтрации несмешивающихся жидкостей Маскета — Леверетта [44] выписываются как некоторое обобщение закона Дарси для каждой из фаз, причем обобщение достигается за счет введения в уравнение Дарси эмпирических функций, называемых фазовыми проницаемостями. Обработка многочисленных экспериментов, в которых совместное течение реализовано в образцах масштаба керна, показывает, что фазовые проницаемости зависят в основном от насыщенности фазами. В то же время не исключено влияние на фазовые проницаемости и других факторов, например соотношения вязкостей, степени неравновесности процесса фильтрации, характеристик неоднородности пористой среды и т. д. Очевидно, ситуация существенно усложняется, если при построении обобщенных уравнений Дарси используются элементы среды, имеющие достаточно большой пространственный масштаб. В этом случае распределение жидкостей в элементе может быть самым различным, что приведет к существенным различиям в поправочных коэффициентах — фазовых проницаемостях. Очевидно, объемного содержания фаз, т. е. насыщенностей, недостаточно, чтобы охарактеризовать распределение фаз в таком элементе, и, следовательно, фазовые проницаемости должны зависеть и от других характеристик. В подобных случаях естественнее говорить не о фазовых, а о «модифицированных» или «псевдофазовых» проницаемостях, подчеркивая этим, что «малым» элементом среды является по сути достаточно большой элемент, имеющий внутреннюю структуру, характеристики которой определяют макроскопические свойства элемента.

Охарактеризовав, таким образом, сложность проблемы описания многофазных течений, отметим, что помимо непосредственного определения фазовых проницаемостей по результатам физического эксперимента известны работы по их вычислению при помощи математических моделей капиллярных пучков и капиллярных сетей. Так, в работах Е. М. Минского [27] показано, что использование в качестве микромасштаба среды ее гидравлического радиуса, распределенного по некоторому закону, позволяет установить связь между проницаемостью среды и начальными статистическими моментами микромасштаба. Вводя аналогичные соотношения для насыщенности и фазовых проницаемостей, Е. М. Минский получил зависимости между ними, подобные

известным экспериментальным кривым Викофа и Ботсета. Аналогичная попытка построения фильтрационных характеристик двухфазных потоков при помощи статистических методов предпринята в работах М. И. Вайнера [27]. В предположении логнормальности распределения гидравлического радиуса им получены зависимости «капиллярное давление — насыщенность», «фазовая проницаемость — насыщенность», проанализирована связь полной и несвязной газонасыщенности при фильтрации газированной жидкости.

Пересеченность реальной пористой среды, игнорируемая моделями капиллярных пучков, в какой-то степени моделируется капиллярными сетями. Начиная с работы Фатта, анализ подобных моделей основан на гипотезах о случайном распределении радиусов капилляров, определенном механизме их заполнения несмачивающей жидкостью. Расчетные кривые фазовых проницаемостей и капиллярного давления качественно согласуются с результатами физического эксперимента на реальных средах. Дальнейшее развитие моделей капиллярных сетей связано с усложнением сеточных конфигураций, механизма вытеснения и использованием для расчетов ЭВМ [10].

Далее излагается процедура построения системы уравнений двухфазной фильтрации и вычисления фазовых проницаемостей для некоторых моделей течения двух несмешивающихся жидкостей, основанных на представлении о движении взаимопроникающих жидких однородных фаз и некоторых гипотезах о их структуре.

ГЛОБУЛЬНАЯ МОДЕЛЬ И ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Будем считать, что в каждый момент времени жидкие несмешивающиеся фазы распределены в пространстве таким образом, что фазы в отдельности занимают достаточно большие подобласти, чтобы в них выполнялся закон Дарси для соответствующей однородной фазы. Несколько точнее, это требование означает, что около почти любой точки пространства можно описать сферу, в пористом пространстве которой содержится лишь одна жидкая фаза, а объем сферы достаточно велик для того, чтобы для него имел смысл локальный закон Дарси. Естественно, что такое предположение исключает из рассмотрения случай фильтрации эмульсионных структур. Что же касается важных для практики случаев распределения в нефтяном пласте остаточной (погребенной или реликтовой) воды, а в зоне за фронтом вытеснения остаточной нефти, то обычно остаточная фаза не обладает подвижностью и ее с определенным допущением можно объединить с твердой фазой (скелетом пористой структуры). Примем также, что прилагаемые к системе перепады давлений таковы, что какая-то часть каждой из жидких фаз может быть неподвижной. Например, это могут быть достаточно малые «островки» фазы, окруженные со всех сторон «чужой» фазой.

Следует отметить, что анализ физических представлений и экспериментов по вытеснению [27] в определенной степени согласуется с приведенными гипотезами, положенными в основу принятой модели. Сделанные предположения позволяют записать уравнения движения и, усреднив их, получить уравнения фильтрации многофазных систем.

Начнем с рассмотрения двухфазных систем. Пусть M — трехмерное пространство, занятое пористой средой, насыщенной жидкими фазами, а M_1 и M_2 — его части, такие что M_i — пространство, занятое пористой средой, насыщенной только i-й фазой. Для описания в фиксированный момент времени распределения фаз в пространстве введем в рассмотрение функцию — индикатор фазы $z(\vec{x})$

$$z(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in M_1 \\ 0, & \vec{x} \in M_2 \end{cases} \quad M_1 \cup M_2 = M. \tag{7.1}$$

Считая распределение фаз случайным, найдем моменты z. Очевидно, что

$$<z> = S_1, \; z' = z - S_1, \; <z'^2> = S_1 S_2. \tag{7.2}$$

Здесь S_i — макроскопическая характеристика пористой среды, содержащей две фазы, численно равная средней доле объема пор, занятых i-й фазой, т. е. S_i — макроскопическая насыщенность. При этом следует помнить, что локальная насыщенность в принятой модели может быть равна либо нулю, либо единице. Далее S_i будем называть насыщенностью. Очевидно, что $S_1 + S_2 = 1$.

Введем также в рассмотрение функцию-индикатор подвижности, разбив для этого пространства M_i на подпространства M_i^+ и M_i^-, занятые соответственно подвижной и неподвижной фазами

$$u(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in M_1^+ \cup M_2^+, \\ 0, & \vec{x} \in M_1^- \cup M_2^-. \end{cases} \tag{7.3}$$

Для моментов функций $u(\vec{x})$ имеем

$$<u> = S^+, \; u' = u - S^+, \; <u'^2> = S^+ S^-. \tag{7.4}$$

Здесь S^+ и S^- — соответственно макроскопические насыщенности подвижными и неподвижными фазами. Очевидно, $S^+ + S^- = 1$. Введение функции-индикатора подвижности осуществлено формально, без указания конкретного механизма, регулирующего разделение системы на подвижную и неподвижную части. Следует ожидать, что для несмешивающихся жидкостей таким механизмом является капиллярность. Благодаря ей малые подобласти фазы при умеренных перепадах давления лишены подвижности и являются включениями в бесконечном кластере чуждой фазы. Функция $u(\vec{x})$, таким образом, характеризует меру связности объединения двух бесконечных кластеров.

Используя функции z и u, запишем уравнения фильтрации несжимаемой жидкости во всем пространстве M

$$\vec{v} = -ku(\vec{x})\,\theta(\vec{x})\,\nabla p,\ \operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{7.5}$$

Здесь $\vec{v}$ — вектор скорости фильтрации жидкости; $k = k(\vec{x})$ — проницаемость; p — давление; функция $\theta(\vec{x})$ определяется из соотношения

$$\theta = \theta_2 + (\theta_1 - \theta_2)\,z,\ \theta_i = \mu_i^{-1}, \tag{7.6}$$

где μ_i — вязкость i-й фазы

Очевидно, локальные фазовые скорости определяются по формулам

$$\vec{v}_1 = \vec{v}z,\ \vec{v}_2 = \vec{v}(1 - z).$$

Используя (7.5), будем искать средние скорости фаз

$$\vec{V}_1 = \langle\vec{v}_1\rangle = \langle\vec{v}z\rangle,\ \vec{V}_2 = \langle\vec{v}_2\rangle = \langle\vec{v}(1 - z)\rangle, \tag{7.7}$$

или

$$\operatorname{div}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 0,$$

$$\vec{V}_1 = -\theta_1\langle kzu\nabla p\rangle,\ \vec{V}_2 = -\theta_2\langle k(1 - z)u\nabla p\rangle, \tag{7.8}$$

и, следовательно, для макроскопического описания необходимо вычислить корреляции полей k, z, u, ∇p. Легко понять, что такая задача в общем случае вряд ли разрешима, и потому далее будут использованы приближения метода возмущений.

Представим рассматриваемые случайные поля в виде

$$\begin{gathered}\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}',\ \vec{v}_0 = \langle\vec{v}\rangle,\ p = p_0 + p',\ p_0 = \langle p\rangle,\\ k = k_0 + k',\ k_0 = \langle k\rangle,\ u = u_0 + u',\ u_0 = \langle u\rangle = S^+,\\ \theta = \theta_0 + \theta',\ \theta_0 = \langle\theta\rangle = \theta_2 + (\theta_1 - \theta_2)\,S_1\end{gathered} \tag{7.9}$$

и будем считать флуктуации k', θ', u' достаточно малыми в том смысле, что достаточно малы их коэффициенты вариации. Флуктуации поля z' малыми не предполагаются. Тогда в разложении, квадратичном по флуктуациям, но линейном по указанным малым параметрам, будем иметь

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 = -\theta_1[&k_0u_0z_0\nabla p_0 + k_0u_0\langle z'\nabla p'\rangle + k_0\langle z'u'\rangle\nabla p_0 +\\ &+ \langle k'z'\rangle u_0\nabla p_0],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_2 = -\theta_2[&k_0u_0(1 - z_0)\nabla p_0 - k_0u_0\langle z'\nabla p'\rangle - k_0\langle z'u'\rangle\nabla p_0 -\\ &- \langle k'z'\rangle u_0\nabla p_0].\end{aligned} \tag{7.10}$$

Здесь уместно отметить, что степень влияния отброшенных членов в случае немалых флуктуаций неясна.

Для вычисления корреляции $<z'\nabla p'>$ используем систему, связывающую флуктуации в рассматриваемом приближении

$$\vec{v}' = -k_0 u_0 \theta_0 \left[\left(\frac{k'}{k_0} + \frac{\theta'}{\theta_0} + \frac{u'}{u_0} \right) \nabla p_0 + \nabla p' \right], \quad \operatorname{div} \vec{v}' = 0. \quad (7.11)$$

Будем полагать, что $k_0 = \text{const}$, $\theta_0 = \text{const}$, $u_0 = \text{const}$, а система координат ориентирована так, что $\nabla p_0 = (\alpha, 0, 0)$, $\alpha = \text{const}$. Тогда

$$\nabla^2 p' = -\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{k'}{k_0} + \frac{u'}{u_0} + \frac{\theta'}{\theta_0} \right) = -\alpha \varphi (\vec{x}). \quad (7.12)$$

Считая рассматриваемую область достаточно большой, можно записать

$$p' (\vec{x}) = \alpha \int G (\vec{x}, \vec{x}') \varphi (\vec{x}') dx'^3,$$

$$G (\vec{x}, \vec{x}') = 1/4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|.$$

Теперь нетрудно получить

$$<z\nabla p'> = \alpha \int \nabla G \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{M_{z,k}}{k_0} + \frac{M_{z,u}}{u_0} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_0} M_{z,z} \right] dx'^3, \quad (7.13)$$

где M — взаимный корреляционный момент соответствующих полей.

Предположим, что поля z и u однородны и изотропны, а взаимные корреляции их, так же как и с полем k, однородны и изотропны и стремятся к нулю на бесконечности. Принятие таких предположений позволяет вычислить в конечном виде корреляцию (7.13), однако следует отметить, что если постулирование однородностей полей z и u выглядит достаточно естественным, то предположение об их изотропии представляется в достаточной мере спорным. Можно ожидать, что в процессе вытеснения, тем более, если состояние фаз существенно неравновесно, распределение фаз неизотропно. Имея в виду это обстоятельство и принимая, тем не менее, гипотезу изотропии, в последующем изложении мы вернемся к этой проблеме и рассмотрим случай неизотропного распределения фаз.

Итак, вычислив (7.13) при указанных предположениях и подставив результат в (7.10), для средних фазовых скоростей получим

$$\vec{V}_i = -k_0 \theta_i f_i \nabla p_0, \quad (7.14)$$

$$f_1 = S_1 S^+ - \frac{(\theta_1 - \theta_2) S_1 S_2 S^+}{3\theta_0} + \frac{2}{3} \zeta S^+ \sqrt{S_1 S_2} \lambda_{k,z} + \frac{2}{3} \sqrt{S_1 S_2 S^+ S^-} \lambda_{z,u},$$

$$f_2 = S_2 S^+ + \frac{(\theta_1 - \theta_2) S_1 S_2 S^+}{3\theta_0} - \frac{2}{3} \zeta S^+ \sqrt{S_1 S_2} \lambda_{k,z} - \frac{2}{3} \sqrt{S_1 S_2 S^+ S^-} \lambda_{z,u}.$$

Здесь $\zeta = <k'^2>^{1/2}/k_0$ — коэффициент вариации поля проницаемости, а коэффициенты корреляции соответствующих полей λ вводятся равенствами

$$M_{z,u} = \sqrt{S_1 S_2 S^+ S^-} \lambda_{z,u}, \quad M_{k,z} = k_0 \zeta \sqrt{S_1 S_2} \lambda_{k,z}. \quad (7.15)$$

Отметим, что рассмотрение соответствующей плоской задачи также приводит к формулам (7.14) с той разницей, что тройки в знаменателях соответствующих членов должны быть заменены двойками, а двойки в числителях — единицами.

Коэффициенты корреляции λ и параметр S^+ вообще говоря зависят от насыщенности, отношения вязкостей, меры неравновесности системы и т. д. Естественно ожидать, что в равновесном состоянии, если фаза 1 смачивающая, а фаза 2 несмачивающая, коэффициент $\lambda_{kz} \leqslant 0$, так как смачивающая фаза в состоянии капиллярного равновесия стремится в первую очередь заполнить подобласти пониженной проницаемости. Естественно, что при этом фазовая проницаемость для смачивающей жидкости будет снижаться, а для несмачивающей — повышаться.

Если первая фаза — смачивающая, можно ожидать, что при достаточно больших значениях S_1 коэффициент корреляции $\lambda_{z,u} \geqslant 0$. Наоборот, при малых S_1 менее связной будет, по-видимому, первая фаза, и, следовательно, $\lambda_{z,u} \leqslant 0$. Поэтому, как следует из (7.14), при больших S_1 будет иметь место увеличение f_1 при снижении f_2. При малых S_1, наоборот, снижается f_1, а увеличивается f_2.

Зависимость S^- от S_1 почти очевидна. Можно полагать, что $S^-(0) = S^-(1) = 0$. В интервале (0,1) параметр S^- отличен от нуля и достигает в некоторой точке максимального значения. Пусть экспериментально найдены функции фазовых проницаемостей f_1^* и f_2^*. Тогда, предполагая, что эти функции удовлетворяют равенствам (7.14), получим

$$S^+ = f_1^* + f_2^*, \quad S^- = 1 - (f_1^* + f_2^*) \tag{7.16}$$

Определение остальных параметров при помощи f_i^* в общем случае невозможно. Однако, если $\mu_1 = \mu_2$ и среда однородна по проницаемости ($\zeta = 0$), можно определить $\lambda_{z,u}$

$$\lambda_{z,u} = \frac{3}{2} \frac{S_2 f_1^* - S_1 f_2^*}{\sqrt{S_1 S_2 (f_1^* + f_2^*)(1 - f_1^* - f_2^*)}}. \tag{7.17}$$

Поскольку $\lambda_{z,u}$ — коэффициент корреляции, $|\lambda_{z,u}| \leqslant 1$, что налагает ограничения на функции f_i^*, которые нельзя задать произвольно. Например, если функции f_i^* представлены параболами $f_i^* = S_i^{\alpha_i}$ легко получить условие $\alpha_i \geqslant 9/4$. Это обстоятельство определяется зависимостью фазовых проницаемостей от механизма течения, определяемого в свою очередь моделью и структурой среды. Любопытно, что для двумерных фазовых проницаемостей ограничение на α_i еще жестче. Уменьшение размерности пространства приводит к усилению роли «чужой» фазы и условию $\alpha_i \geqslant 4$. На рис. 51 приведены зависимости $S^-(S_1)$ и $\lambda_{z,u}(S_1)$ для степенных фазовых проницаемостей при $\alpha = 9/4$, помещенных там же. Обращает на себя внимание высокое содержание неподвижных фаз при $S_1 \approx 0{,}5$. Взаимное диспергирование наиболее сильно в случае примерного равенства содержания фаз в системе. Не случайно и проводимость системы в целом в этой

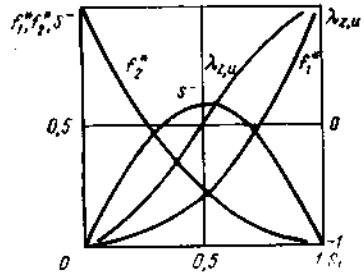


Рис. 51. Зависимости фазовых проницаемостей f_i^*, коэффициента корреляции $\lambda_{z,u}$ и насыщенности защемленными фазами S^- от насыщенности первой фазой S_1

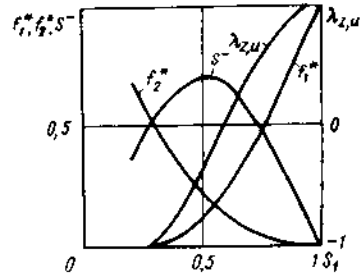


Рис. 52. Зависимости фазовых проницаемостей f_i^*, коэффициента корреляции $\lambda_{z,u}$ и насыщенности защемленными фазами S^- от насыщенности первой фазой S_1

области обычно минимальна. Изменение коэффициента корреляции $\lambda_{z,u}$ (см. рис. 52) соответствует приведенному качественному анализу.

На рис. 52 аналогичные зависимости построены по кривым фазовых проницаемостей Леверетта, полученным из эксперимента по фильтрации водонефтяных систем с различным отношением вязкостей. Качественно эти кривые аналогичны кривым на рис. 51. Можно лишь отметить некоторую их асимметрию, связанную с различной смачивающей способностью фаз, использованных Левереттом в эксперименте.

Приводя результаты обработки опытов Леверетта, отметим их определенную условность, поскольку неясно, может ли стационарное течение на образцах малого масштаба, реализованное в эксперименте, иметь глобульную структуру с непрерывным полем давления. И хотя капиллярные эффекты при этом частично учтены посредством введения в рассмотрение несвязной части каждой из фаз, неподвижность которых постулируется, более полный учет капиллярности сьязан с некоторой модификацией модели.

Пусть, как и ранее, жидкие фазы сосуществуют в виде глобул. Будем считать, что в данный момент времени давления в областях M_1^+ и M_2^+ являются непрерывными функциями, соответственно $p_1 \times \times (\vec{x})$ и $p_2(\vec{x})$. Рассматривая движение первой фазы в пространстве M, будем считать, что оно происходит в подпространстве M_1^+, а остальная часть пространства M, ее обозначим символом M/M_1^+, непроницаема для первой фазы. Аналогично рассматривается движение второй фазы: оно происходит в пространстве M_2^+, а подпространство M/M_2^+ непроницаемо для второй фазы. При таких предположениях о распределении фаз и их взаимодействии уравнение течения первой фазы в любой точке пространства M имеет вид

$$\vec{v}_1 = -k b_1 u z \nabla p_1, \quad \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0. \tag{7.18}$$

Аналогично для второй фазы имеем во всем пространстве M

$$\vec{v}_2 = -k\theta_2 u\,(1-z)\,\nabla p_2,\ \operatorname{div}\vec{v}_2 = 0. \tag{7.19}$$

Обозначим $\vec{V}_1 = <\vec{v}>$, $P = <p_1>$ и введем эффективную проницаемость всей системы пористая среда — две жидкости для первой фазы. Обращаясь к (7.18) и обозначив вводимую эффективную проницаемость символом λ_1, запишем определяющую ее систему уравнений

$$\vec{V}_1 = -\theta_1\lambda_1\nabla P_1,\ \operatorname{div}\vec{V}_1 = 0. \tag{7.20}$$

Таким образом, λ_1 — эффективная проницаемость пространства M, локальная проницаемость которого есть $k\,u\,z$. Очевидно, такое распределение проницаемости в соответствии с принятой моделью соответствует исходному полю, в котором непроницаемые включения размещены в тех местах, где имеется вторая фаза или неподвижна первая.

Для получения из (7.20) относительных фазовых проницаемостей необходимо ввести k_* — эффективную проницаемость всего пространства, заполненного однородной жидкостью. Умножив и разделив правую часть первой формулы из (7.20) на k_*, получим

$$\vec{V}_1 = -\theta_1 k_* f_1 \nabla P_1,\ \operatorname{div}\vec{V}_1 = 0,\ f_1 = k_*^{-1}\lambda_1. \tag{7.21}$$

Обозначив $\vec{V}_2 = <\vec{v}_2>$, $P_2 = <p_2>$ и введя λ_2 — эффективную проницаемость пространства M, локальная проницаемость которого $k(1-z)\,u$, запишем систему уравнений для второй фазы

$$\vec{V}_2 = -\theta_2 k f_2 \nabla P_2,\ \operatorname{div}\vec{V}_2 = 0,\ f_2 = k_*^{-1}\lambda_2. \tag{7.22}$$

Таким образом, для определения относительных фазовых проницаемостей необходимо найти эффективные проницаемости трех систем:

1) всего пространства M;

2) пространства M, в котором подпространство M_1^+ насыщено однородной жидкостью, а его дополнение M/M_1^+ имеет нулевую проницаемость;

3) пространства M, в котором подпространство M_2^+ насыщено однородной жидкостью, а его дополнение M/M_2^+ имеет нулевую проницаемость.

Очевидно, для определения эффективных проницаемостей помимо задания распределения локальной проницаемости всего пространства M необходимо задать подпространства M_i^+. С этой целью введем в рассмотрение функции-индикаторы W_i

$$W_i = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in M_i^+, \\ 0, & \vec{x} \in M/M_i^+. \end{cases} \tag{7.23}$$

Легко видеть, что для моментов W_i имеем

$$<W_i> = S_i^+, \quad <|W_i - <W_i>|^2> = S_i^+ (1 - S_i^+),$$

где S_i^+ — насыщенность среды подвижной i-й фазой.

Задача определения эффективной проницаемости неоднородной среды в данном случае связана с дополнительными трудностями, обусловленными разрывностью поля $\sigma_i = kW_i$ и значительными флуктуациями. Использование приближенных решений, полученных методом возмущений, сопряжено в этом случае с трудно оцениваемой погрешностью. Поэтому приводя результаты, полученные методом возмущений и учитывая их определенную условность, позднее для этой же задачи мы используем теорию самосогласованного поля.

Итак, предполагая, что поле σ_i изотропно, в приближении, линейном по флуктуациям k' и W_i', для течения в трехмерном пространстве получим эффективную проводимость

$$\sigma_i^* = 3k <W_i> (1 + 2 <W_i>)^{-1} [<W_i> + (1 - <W_i>) \zeta_k \lambda_{k, W_i}]. \tag{7.24}$$

Относительные фазовые проницаемости в рассматриваемом приближении имеют вид

$$f_i = 3S_i^+ (1 + 2S_i^+)^{-1} [S_i^+ + (1 + S_i^+) \zeta_k \lambda_{k,\, W_i}]. \tag{7.25}$$

Пусть для простоты $\zeta_k = 0$. Тогда

$$f_i = 3 (S_i^+)^2 / (1 + 2S_i^+). \tag{7.26}$$

Из (7.26) следует, что при изотропном распределении фаз, а именно при этом условии получено соотношение (7.25), фазовые проницаемости ограничены сверху

$$f_i \leqslant 3S_i^2 (1 + 2S_i)^{-1}. \tag{7.27}$$

Вообще же говоря, предположение об изотропии в распределении фаз в достаточной мере сомнительно. Следует ожидать, что в процессе вытеснения, тем более, если состояние существенно неравновесно, распределение фаз, а следовательно, и фазовые проницаемости неизотропны. Позднее, при вычислении эффективных проницаемостей методом самосогласования, будет рассмотрен и случай анизотропного распределения фаз.

Возвращаясь к (7.26), можно отметить, что, например, модельные фазовые проницаемости $f_i = S_i^2$ удовлетворяют условию (7.27). Для таких фазовых проницаемостей имеем

$$S_i^- = S_i^+ [\sqrt{3} (1 + 2S_i^+)^{-1} - 1].$$

Графики зависимостей f_i, S_i^- и S^- от S приведены на рис. 53. На рис 54 приведены зависимости S_i^- и S^- от S_i для f_i — экспериментальных кривых Леверетта (см. рис. 53).

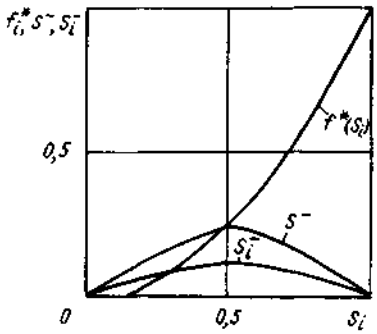


Рис. 53. Зависимости фазовых проницаемостей f_i, насыщенностей защемленными фазами S_i^- и S^- от насыщенности S_i

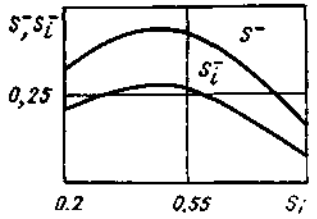


Рис. 54. Зависимости насыщенностей защемленными фазами S_i^- и S^- от насыщенности S_i

САМОСОГЛАСОВАННЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ. ФАЗОВЫЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Используемые для описания фильтрации нескольких жидкостей обобщения закона Дарси основаны на гипотезе существования своей эффективной проводимости для каждой из жидкостей. Такая трактовка фазовых проницаемостей и гипотезы о распределении фаз позволяет, усреднив локальный закон Дарси, вычислить фазовые проницаемости. Однако использованный для этого метод возмущений при сильных возмущениях вряд ли удовлетворителен, скорее он позволяет проиллюстрировать предлагаемый подход, приводя к соотношениям, которые можно считать качественно правдоподобными. Представляется, что определение эффективных фазовых проводимостей методами теории самосогласования целесообразно для рассматриваемой неоднородной среды, поскольку для нее характерны скачкообразные изменения проводимости [36].

Будем считать, что жидкие фазы образуют связные подобласти в пространстве и хотя бы некоторые масштабы этих подобластей соизмеримы с масштабами, определяющими область фильтрации в целом. В этом случае среди масштабов будут существенно различающиеся по величине и трудно ожидать, что распределение фаз будет изотропным. Отсюда следует, что эффективные характеристики — фазовые проницаемости таких течений должны быть тензорными функциями. Более того, если характерные масштабы фазовых подобластей достаточно велики и процесс движения нестационарен, фазовые проницаемости могут оказаться нелокальными характеристиками в том смысле, что перестройка жидких подобластей в окрестности какой-либо точки связана с перестройкой системы в целом и может определяться внешними краевыми условиями. Своеобразная неравновесность в этом случае имеет

внешний характер, поэтому ее можно учесть лишь при решении глобальной задачи.

По-видимому, целесообразно рассмотреть два варианта вычисления фазовых проницаемостей. В первом случае, рассматривая фильтрацию смешивающихся жидкостей, но пренебрегая молекулярным перемешиванием, естественно считать, что гидродинамическое поле давления в различных фазах непрерывно. Очевидно, в этом случае относительные фазовые проницаемости зависят от отношения вязкостей жидких фаз. В случае равновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей (второй случай), рассматривая фильтрацию данной фазы, естественно считать, что остальная часть пространства, занятая другими фазами, непроницаема для данной фазы. Иными словами, задача сводится к вычислению эффективной проводимости для однородной жидкости в области, определенная часть которой имеет нулевую проницаемость. В этом случае относительные фазовые проницаемости не зависят от соотношения вязкостей жидкостей.

Пусть неоднородная пористая среда насыщена некоторой совокупностью жидкостей, различающихся по подвижности $\lambda = \mu^{-1}$, где μ — вязкость. Будем называть эти жидкости фазами. Пусть неоднородная пористая среда такова, что ее можно считать объединением включений нескольких типов, различающихся формой и проницаемостью. Будем называть такую среду полиморфной и многокомпонентной. Пусть среда в целом содержит N фаз, имеет M типов включений и R компонентов. Введем в рассмотрение индикаторфункцию

$$z_{ijk}(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in u_{ijk}, \\ 0, & \vec{x} \in u^0_{ijk}. \end{cases} \tag{7.28}$$

Здесь множество u_{ijk} — объединение подмножеств, точки которых одновременно принадлежат i-й фазе, содержатся во включении j-го типа и проницаемости в которых составляют σ^k; множество u^0_{ijk} — дополнение множества u_{ijk} до всего пространства.

Усреднив функцию-индикатор по ансамблю, получим p_{ijk} — матрицу третьей валентности, имеющую размерность $N \times M \times R$, компоненты которой p_{ijk} — вероятности попадания точки в множество u_{ijk}. В дальнейшем будут использоваться матрицы более низких валентностей, получающиеся из p_{ijk} суммированием ее компонент по индексам. В этом случае индекс, по которому проведено суммирование, заменяется нулем. Например,

$$p_{ij0} = \sum_k p_{ijk}, \quad p_{i00} = \sum_{j,k} p_{ijk}, \quad p_{000} = 1.$$

Будем считать, что жидкие фазы распределены таким образом, что индивидуальное включение, а оно как и раньше имитируется эллипсоидом, содержит только одну фазу. В этом случае проводимость внутри включения из u_{ijk} равна $\sigma^k \lambda_i$. Если все фазы одинаковы, т. е. фильтруется однородная жидкость, вязкость которой

примем за единицу, проводимость включений равна σ^k. В этом случае тензор эффективной проводимости определяется системой уравнений

$$\sum_{i,k} p_{0ik}\zeta^{ik} - E = 0. \tag{7.29}$$

Здесь тензор ζ^{ik} определяется из соотношения

$$\zeta_{ll}^{ik} = \frac{\sigma_l^*}{\sigma_l^* - n_l^j(\sigma_j^* + \sigma^k)}, \quad \zeta_{lm}^{ik} = 0, \quad l \neq m; \tag{7.30}$$

j у n_l^j показывает принадлежность точки к включению типа j.

Решив систему (7.29) и вычислив тензор эффективной проницаемости для однородной жидкости σ^*, можно перейти к вычислению тензора относительной проницаемости для каждой из фаз.

По определению фазовая скорость равна

$$\vec{v}_i = \sum_{j,k} z_{ijk}\vec{v}_{ijk}. \tag{7.31}$$

Ее среднее значение, если учесть постоянство скоростей внутри включений, составляет

$$\vec{V}_i = \langle \vec{v}_i \rangle = \sum_{j,k} p_{ijk}\vec{v}_{ijk} = \sum_{j,k} p_{ijk}\sigma^k\lambda_i\zeta^{ijk}\vec{H} =$$

$$= \lambda_i\sigma^*(\sigma^*)^{-1}\sum_{j,k} p_{ijk}\sigma^k\zeta^{ijk}\vec{H}.$$

Отсюда

$$\vec{V}_i = \lambda_i\sigma^* f^i\vec{H}. \tag{7.32}$$

где тензор относительной фазовой проницаемости имеет вид

$$f = (\sigma^*)^{-1}\sum_{j,k} p_{ijk}\sigma^k\zeta^{ijk}. \tag{7.33}$$

При вычислении тензора ζ^{ijk} следует найти эффективную проводимость системы в целом σ_0^*, решив уравнение

$$\sum_{i,j,k} p_{ijk}\zeta^{ijk} - E = 0, \tag{7.34}$$

где

$$\zeta_{ll}^{ijk} = \frac{\sigma_{0l}^*}{\sigma_{0l}^* - n_l^j(\sigma_{0l}^* - \lambda_i\sigma^k)}, \quad \zeta_{lm}^{ijk} = 0, \quad l \neq m.$$

Для иллюстрации рассмотрим систему, для которой $N = 2$, $M = 1$, $R = 1$. Иными словами, среда состоит из однородных и одинаковых по проницаемости включений, заполненных двумя фазами. Распределение всех параметров задается вероятностями P_{111} и P_{211}, причем $P_{111} + P_{211} = 1$. Очевидно, P_{111} — это насыщенность первой фазовой, обозначим ее P, а $(1 - P)$ — насыщенность второй фазой. На рис. 55, 56 представлены зависимости тензоров f^1 и f^2

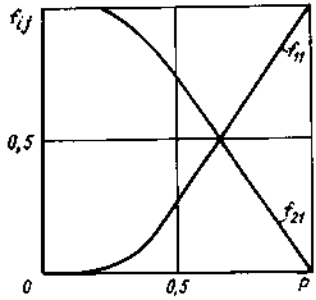


Рис. 55. Зависимости фазовых проницаемостей f_{ij} от насыщенности P при $\lambda_2/\lambda_1 = 10^{-2}$, $b/a = 1$ и шаровых фазовых включениях

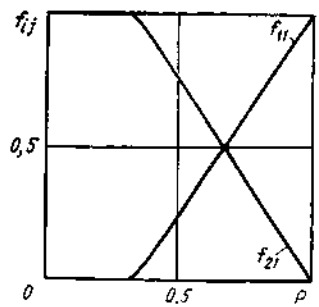


Рис. 56. Зависимости фазовых проницаемостей f_{ij} от насыщенности P при $\lambda_2/\lambda_1 = 10^{-4}$, $b/a = 1$ и шаровых фазовых включениях

от P для $\lambda_2/\lambda_1 = 10^{-2}$, 10^{-4} и включений — сфер. На рис. 57, 58 приведены результаты расчета, когда включения — ориентированные вдоль первой оси вытянутые эллипсоиды вращения с $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 10^{-1}$. Поскольку в первом варианте включения — сферы, тензоры f^i шаровые, во втором случае наблюдается заметная анизотропия. Для рассматриваемых случаев характерно соотношение $\Sigma f^i = E$, что является следствием равенства $R = 1$. В общем случае, как это видно из (7.33) и (7.34), имеет место $\sum_i f^i \neq E$. Более того, возможны случаи, когда $f^i_{ii} > 1$. Для иллюстрации этого положения рассмотрим вариант, когда например, $N = 2$, $M = 1$, $R = 2$. Пусть распределение неоднородностей таково, что они образуют слоистую структуру, слои которой параллельны плоскости (1,2). Тогда $n^1_1 = n^1_2 = 0$, $n^1_3 = 1$. Из (7.34) следует $\zeta^{i1k}_{11} = \zeta^{i1k}_{22} = 1$, $\zeta^{i1k}_{33} = \sigma^*_{03}/\lambda_i a^k$.

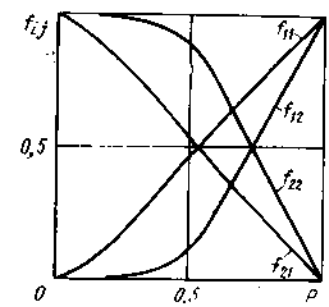


Рис. 57. Зависимости компонент тензора относительных фазовых проницаемостей от насыщенности P при $\lambda_2/\lambda_1 = 10^{-2}$ и фазовых включениях — вытянутых эллипсоидах вращения с $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 0,1$

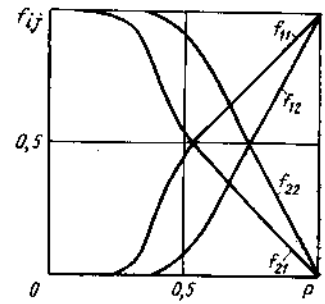


Рис. 58. Зависимости компонент тензора относительных фазовых проницаемостей от насыщенности P при $\lambda_2/\lambda_1 = 10^{-4}$ и фазовых включениях — вытянутых эллипсоидах вращения $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 0,1$

Рассмотрим простейший случай $P_{111} = P$, $P_{112} = 0$, $P_{211} = 0$, $P_{212} = 1 - P$, т. е. объемное содержание одноименных фаз и компонентов неоднородностей одинаково и они совмещены в пространстве. Подставив вероятности и ζ в (7.33), получим

$$f^1_{11} = f^1_{22} = P, \quad f^2_{11} = f^2_{22} = 1 - P,$$

$$f^1_{33} = P\lambda_2 \frac{P\sigma^2 + (1-P)\sigma^1}{P\sigma^2\lambda_2 + (1-P)\sigma^2\lambda_1}, \quad f^2_{33} = (1-P)\lambda_1 \frac{P\sigma^2 + (1-P)\sigma^1}{P\sigma^2\lambda_2 + (1-P)\sigma^1\lambda_1}.$$

Результаты расчета f^i_{33} по данным формулам приведены ниже.

$\sigma^1/\sigma^2 = 10$, $\lambda_1/\lambda_2 = 10^{-1}$,

P	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	1
f^1_{33}	0	0,48	0,91	1,64	2,19	2,75	2,59	1,71	1,38	1
f^2_{33}	1	0,90	0,81	0,63	0,50	0,28	0,11	0,02	0,01	0

$\sigma^1/\sigma^2 = \lambda_1/\lambda_2 = 10$,

p	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	1
f^1_{33}	0	0,005	0,01	0,02	0,03	0,05	0,09	0,16	0,23	1
f^2_{33}	1	0,99	0,99	0,82	0,72	0,50	0,36	0,17	0,12	0

Легко видеть, что приведенные данные для $\sigma^1/\sigma^2 = 10$, $\lambda_1/\lambda_2 = 10^{-1}$ соответствуют случаю, когда высоковязкая фаза совмещена с высокопроницаемой компонентой среды, а менее вязкая — с низкопроницаемой. Такая комбинация «благоприятна» для высоковязкой фазы, поскольку при этом максимально увеличивается поле в этой фазе по сравнению с распределением поля при движении однородной жидкости, определяемом только соотношением проницаемостей. Этот эффект и является причиной того, что при достаточно больших P относительная фазовая проницаемость $f^1_{33} > 1$.

Случай, если $\sigma^1/\sigma^2 = \lambda_2/\lambda_1 = 10$, в определенном смысле обратен рассмотренному. Здесь высоковязкая фаза совмещена с низкопроницаемой компонентой и $f^i_{33} \leqslant 1$. Нетрудно видеть, что если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $f^1_{33} = P$, $f^2_{33} = 1 - P$. Если же $\sigma^1 = \sigma^2$, то $f^i_{33} < 1$, $f^1_{33} + f^2_{33} = 1$. Таким образом, если давление в фазах представляет собой единое поле, относительные фазовые проницаемости существенно зависят от отношения вязкостей и проницаемостей и матрицы P_{ijk}, описывающей распределение фаз по элементам неоднородности. Из примера видно, что относительные фазовые проницаемости могут изменяться в широких пределах и быть немонотонными. Возникает проблема описания подобных систем, поскольку, вообще говоря, матрица P_{ijk} входит в число искомых функций и нужны соотношения для замыкания системы, состоящей из законов сохранения фаз и обобщенных законов Дарси для каждой фазы. Обычный вариант теории равновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей является в этом смысле предельной ситуацией,

поскольку в равновесном состоянии поля фазовых давлений расщеплены, фазовые проницаемости не зависят от вязкостей жидкостей и зависят лишь от насыщенностей. Критические предельные насыщенности, а в данном случае это пороги протекания, определяются геометрией фаз. Предельным является и вариант теории, использующий для макроописания так называемые модифицированные фазовые проницаемости, при вычислении которых распределение фаз по компонентам неоднородности задается на основании гипотез капиллярного, гравитационного или капиллярно-гравитационного равновесия, а в некоторых случаях в соответствии с их подвижностями.

ГЛАВА 8

ОЦЕНКА ЗАСТОЙНЫХ ЗОН ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

Важный фактор, существенно влияющий на разработку нефтяных пластов,— распространение в нем участков малой проницаемости, условно считающихся неколлектором. Эти зоны, размер которых варьирует в очень широких пределах (от микроскопических — порядка миллиметров до сотен метров) естественно слабо или вообще не охватываются процессом вытеснения. Но, кроме того, они в определенной степени экранируют какую-то часть коллектора, ухудшая показатели вытеснения. Поскольку имеющиеся в настоящее время математические модели не в состоянии адекватно отобразить весь реальный спектр зон неколлектора, особенно его мелкомасштабную часть, приходится вводить в модельные уравнения некоторые поправки типа так называемого коэффициента охвата, чтобы исключить из рассмотрения объем экранируемой части коллектора.

Очевидно, рассмотрение вопроса об охвате в достаточно общем случае приводит к практически непреодолимым трудностям. Помимо уже упомянутого широкого диапазона изменения зон неколлектора и коллектора, эффект экранирования зависит от физических особенностей реализуемого в пласте фильтрационного процесса, геометрии сетки скважин и их дебитов, а также от некоторых других факторов. Определение меры экранирования коллектора, т. е. разумное определение коэффициента охвата,— также трудная задача.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОХВАТА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В СРЕДАХ С НЕПРОНИЦАЕМЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим относительно простую фильтрацию однородной ньютоновской жидкости в пласте достаточно больших размеров, содержащем зоны неколлектора. Поскольку какая-то часть коллектора может оказаться изолированной неколлектором, естественно определить коэффициент охвата K как долю коллектора, в котором

вектор скорости фильтрации отличен от нуля. Такое определение не является единственно возможным. Естественны и такие определения, в которых мерой охвата является вероятность выброса диссипируемой в пласте энергии за некоторый уровень или вероятность выброса модуля скорости [36]. Принятое нами определение коэффициента охвата соответствует так называемой вероятности перколяции, используемой в теории легированных полупроводников [32, 37]. Очевидно, задача определения K эквивалентна задаче нахождения доли связной части коллектора, т. е. проблеме чисто геометрической. Для ее решения в [32] при заданной доле коллектора в системе методом Монте-Карло генерируется множество реализаций случайных полей достаточно большого объема и определяется оценка вероятности попадания блуждающей только по коллектору точки на внешнюю границу области. Помимо большой трудоемкости такой способ требует задания достаточно тонких характеристик внутренней структуры случайного поля, в реальных условиях обычно неизвестных.

Покажем возможность оценки параметра K по глобальным фильтрационным характеристикам системы, допускающим, в частности, экспериментальное ее определение. Рассмотрим вначале случай, когда в однородном коллекторе проводимости σ случайно размещены зоны неколлектора нулевой проводимости. Пусть во всей области локально выполнены уравнения переноса

$$\vec{v} = \sigma\vec{h}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{h} = 0. \tag{8.1}$$

Здесь $\vec{v}$ — скорость фильтрации поля; $\sigma(x)$ — тензор изотропной случайной проводимости с вероятностью P, принимающей значение $\sigma = \text{const}$, и с вероятностью $1 - P$ — значение $\sigma = 0$. Пусть задано также постоянное среднее поле $\vec{H} = \langle\vec{h}\rangle$, а тензор эффективной проводимости неограниченной среды σ_* определен из соотношения

$$\langle\vec{v}\rangle = \vec{V} = \sigma_*\vec{H}, \quad \operatorname{div}\vec{V} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = 0. \tag{8.2}$$

Здесь и далее угловые скобки — символ усреднения по объему, в данном случае по объему всей области.

Поскольку в изоляторе и в экранированной части проводника $\vec{v} = 0$, можно записать

$$KP\langle\vec{v}\rangle_0 = \sigma_*\vec{H}. \tag{8.3}$$

Здесь индекс нуль у значка усреднения означает, что усреднение проводится только по связной части объема проводника.

Поскольку энергия диссипируется только в связной части объема проводника, уравнение ее баланса имеет вид

$$KP\langle\vec{v}^2\rangle_0 = \sigma(\vec{H}, \sigma_*\vec{H}). \tag{8.4}$$

Уравнениям (8.3) и (8.4) эквивалентны условия

$$<\vec{v}^2>_0 = (PK)^{-2}(\sigma_*\vec{H},\ \sigma_*\vec{H}), \tag{8.5}$$

$$<\vec{v}^2>_0 = (PK)^{-1}\sigma\,(\vec{H},\ \sigma_*\vec{H}).$$

Учитывая, что $<\sigma> = \sigma P$, а дисперсия потока в связной части неотрицательна

$$(D\vec{v})_0 = <\vec{v}^2>_0 - <\vec{v}>_0^2 \geqslant 0, \tag{8.6}$$

из (8.5) и (8.6) получаем оценку для K

$$K \geqslant K_* = (\sigma_*\vec{H},\ \sigma_*\vec{H})/(<\sigma>\vec{H},\ \sigma_*\vec{H}). \tag{8.7}$$

Если среда макроскопически изотропна, из (8.7) имеем

$$K \geqslant \sigma_*/<\sigma>. \tag{8.8}$$

Отметим, что выражение для K^* универсально в том смысле, что не зависит от размерности рассматриваемого поля да и от самого поля, а определяется лишь функционалами — эффективной и средней проводимостями, а в случае анизотропных систем и направлением заданного среднего поля. Поскольку оценка (8.7) реализуется точно и как равенство в предельной ситуации слоистой системы, она неулучшаема без привлечения дополнительной информации о структуре среды.

Уместно подчеркнуть, что оценку K_* для реальных систем можно найти экспериментальным путем, определяя эффективную проводимость σ_*.

Если проводящая часть системы — коллектор в свою очередь неоднороден, способ получения оценки K_* оказывается более грубым, но при не слишком широком диапазоне изменения проводимости коллектора может оказаться полезным. Пусть $\sigma_+ = \max\sigma$. Тогда нетрудно получить для K неравенства (8.7), (8.8) с той разницей, что вместо $<\sigma>$ в них следует подставить $\sigma_+ P$.

Представляет интерес сравнить K_* и K, полученные в результате математического эксперимента на простых кубических и квадратных сетках [32] (рис. 59). В первом случае из правильной кубической сетки $15\times15\times15$, составленной из проводящих звеньев, случайным образом удаляется некоторое их количество. Подсчитываются вероятность перколяции K и эффективная проводимость как функция доли звеньев проводника. Оценка K_* получена пересчетом по формуле (8.8) и на рис. 59 показана сплошной линией. Аналогичная информация для случая плоской квадратной решетки 50×50 узлов приведена на рис. 60.

Сопоставление кривых вероятности перколяции и ее оценки показывает, что оценка сильно занижена, особенно для трехмерного поля.

Рассмотрим случай, когда в системе имеется малое количество непроводящих включений. Если они распределены случайно, то, очевидно, образование достаточно больших конгломератов из

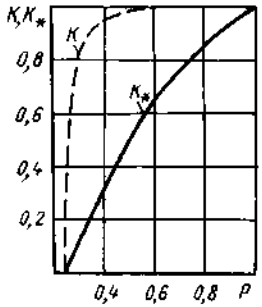


Рис. 59. Зависимости вероятности перколяции и ее нижней оценки от доли проводника в трехмерной сеточной структуре

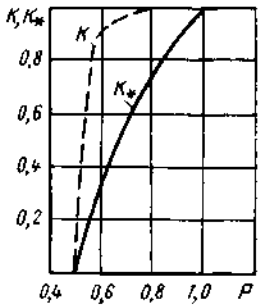


Рис. 60. Зависимость вероятности перколяции и ее нижней оценки от доли проводника в двумерной сеточной структуре

неколлектора маловероятно. Скорее всего неколлектор будет образовывать изолированные островки, окруженные коллектором. В этом случае застойных зон практически не будет, что и видно на кривых вероятности перколяции, которые очень близки к единице при доле коллектора, большей 0,5 — в трехмерном случае и 0,75 — в двумерном. С другой стороны, изолированные включения неколлектора влияют на эффективную проводимость системы, снижая ее тем заметнее, чем больше доля неколлектора. Как известно, при малых концентрациях неколлектора это снижение происходит по линейному закону, что легко проследить и на фигурах, где нижняя оценка вероятности перколяции — отношение эффективной проводимости системы к средней проводимости при P, близких к единице, почти линейна.

При высоких содержаниях неколлектора вероятность перколяции и ее оценка сближаются и, совпадая в точке — пороге перколяции, обе равны нулю. Однако относительная погрешность при этом может быть очень большой, по крайней мере так обстоит дело в рассматриваемом примере.

Таким образом, использование нижней оценки вероятности перколяции для определения доли коллектора, не охваченного процессом движения, связано с большой погрешностью. Пусть, например, доля неколлектора в системе составляет 30 %. В трехмерном случае вероятность перколяции практически равна единице, в двумерном она составляет 0,98—0,99. Нижняя оценка в этом случае равна соответственно 0,75 и 0,55. Иными словами, в соответствии с нижней оценкой примерно $^1/_4$ и $^1/_2$ объема коллектора попадают в застойные зоны, в то время как точный анализ показывает, что практически весь коллектор охвачен движением. Естественно, что использование нижней оценки в этом случае может привести к серьезным количественным погрешностям. Ее использование сопряжено с сильным завышением объема экранированного коллектора и, как следствие, с сильным занижением

нефтеотдачи. О порядке погрешностей в этом случае можно судить по приведенным примерам. На наш взгляд, допускаемая при этом погрешность весьма велика.

С другой стороны, кривые вероятности перколяции показывают, что при умеренном содержании неколлектора, не превышающем 0,3, вероятность перколяции с высокой степенью точности можно принять равной единице. Это означает, что пренебрежимо мал объем коллектора, экранируемого неколлектором. Последнее, конечно, не означает, что неколлектор не влияет на фильтрационный процесс. Напротив, как уже говорилось, эффективная проводимость системы существенно зависит от относительного объема неколлектора и геометрии его расположения. Наличие неколлектора в значительной степени определяет структуру спектра скоростей фильтрации, предопределяя дисперсию технологических показателей. Однако учет этого механизма существенно иной и, как легко понять, его нельзя охарактеризовать коэффициентом охвата.

Как следует из результатов проведенного анализа, универсальность оценки коэффициента охвата (перколяции) — причина его малой эффективности при определении доли застойных зон. Очевидно, для получения более эффективных оценок следует использовать конкретные особенности рассматриваемых систем. Покажем, что учет того факта, что анализируемая система изотропна, позволяет улучшить ее. Для этого будет использован прием, суть которого мы поясним, вновь получив эту оценку.

Итак, рассмотрим некоторую систему, состоящую из проводника проводимости $\sigma=\sigma_0=\text{const}$ и изолятора нулевой проводимости, объемные доли которых P и $1-P$ соответственно. Пусть какая-то часть проводника экранируется изолятором и, следовательно, не участвует в процессе переноса. Рассмотрим новую систему, отличающуюся от исходной лишь тем, что экранированный проводник исходной системы заменен изолятором. Очевидно, в новой системе отсутствует экранированный проводник — доля проводника составляет $\overline{P}=PK$, эффективные проводимости обеих систем одинаковы.

Пусть модифицированная система принадлежит к некоторому классу, для эффективных проводимостей всех систем которого известны границы, и, следовательно,

$$\sigma_-(\overline{P}) \leqslant \sigma_* \leqslant \sigma_+(\overline{P}), \tag{8.9}$$

где тензорное неравенство следует понимать в смысле знаковой полуопределенности соответствующих квадратичных форм. Так, в частности, если границы $\sigma_\pm$ получены из вариационных принципов для энергетического функционала, соотношениям (8.9) соответствуют неравенства

$$(\vec{H},\ (\sigma_-(\overline{P})-\sigma_*)\vec{H}) \leqslant 0, \tag{8.10}$$

$$(\vec{H},\ (\sigma_+(\overline{P})-\sigma_*)\vec{H}) \geqslant 0.$$

Подставив теперь $\overline{P} = PK$ в (8.10) и решив эти неравенства относительно K, получим двустороннюю оценку

$$K_{-}^{-} \leqslant K \leqslant K_{+}^{+}, \tag{8.11}$$

тем более эффективную, чем ближе к точному значению σ_* граница $\sigma_{\pm}$.

Выберем в качестве $\sigma_{\pm}(\overline{P})$ универсальные границы, пригодные для любых систем

$$\sigma_{+} = \langle\sigma\rangle_{м} I, \quad \sigma_{-} = \langle\sigma^{-1}\rangle_{м}^{-1} I, \tag{8.12}$$

где I — единичный тензор, а индекс м означает, что осреднение проводится для модифицированной системы. В рассматриваемом случае $\langle\sigma\rangle_{м} = \sigma_0 \overline{P}$, $\langle\sigma^{-1}\rangle_{м}^{-1} = 0$, следовательно,

$$\sigma \leqslant \sigma_0 PKI, \tag{8.13}$$

что дает в общем случае анизотропной системы и произвольного среднего поля $\vec{H}$ оценку

$$K \geqslant (\vec{H}, \sigma_* \vec{H})/(\vec{H}, \langle\sigma\rangle \vec{H}). \tag{8.14}$$

Легко проверить, что для анизотропных систем и $\vec{H}$, неколлинеарных главным осям тензора σ_*,

$$\frac{\sigma_* \vec{H}, \sigma_* \vec{H}}{\langle\sigma\rangle \vec{H}, \sigma_* \vec{H}} > \frac{\vec{H}, \sigma_* \vec{H}}{\vec{H}, \langle\sigma\rangle \vec{H}},$$

и, следовательно, оценка (8.7) лучше оценки (8.14). Очевидно, для изотропных систем, как и в случае задания $\vec{H}$, коллинеарных главным осям тензора σ_* анизотропной системы, обе оценки совпадают.

Если рассматриваемая система макроскопически изотропна, модифицированная система также изотропна и в качестве верхних границ эффективной проводимости можно выбрать границы (вариационные) Хашина — Штрикмана [41], которые для двумерных и трехмерных континуальных полей имеют вид

$$\sigma_{+}^{(2)} = \sigma \overline{P} (2 - \overline{P})^{-1}, \quad \sigma_{+}^{(3)} = 2\sigma \overline{P} (3 - \overline{P})^{-1}. \tag{8.15}$$

Подставив эти границы в неравенство (8.9) и решив его относительно K, получим для двумерных и трехмерных изотропных полей соответственно

$$K \geqslant K^{-} = \frac{\sigma_*}{\langle\sigma\rangle} \cdot \frac{2}{1 + P\sigma_*/\langle\sigma\rangle}, \tag{8.16}$$

$$K \geqslant K^{-} = \frac{\sigma_*}{\langle\sigma\rangle} \cdot \frac{3}{2 + P\sigma_*/\langle\sigma\rangle}. \tag{8.17}$$

Легко видеть, что новые оценки (8.16) и (8.17) дают более высокую нижнюю границу вероятности перколяции, чем (8.8). Например, в окрестности порога перколяции, т. е. при $\sigma_* \to 0$, учет изотропии системы позволяет улучшить нижнюю оценку для плоского и пространственного полей соответственно в 2 и 1,5 раза.

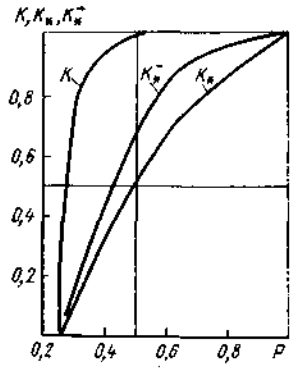


Рис. 61. Зависимость вероятности перколяции и ее нижних оценок от доли проводника в трехмерной изотропной сеточной структуре

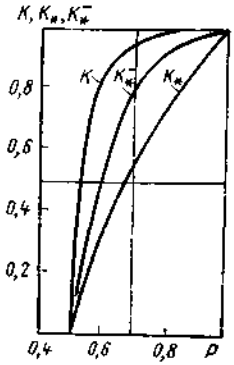


Рис. 62. Зависимость вероятности перколяции и ее нижних оценок от доли проводника в двумерной изотропной сеточной структуре

Есть основание полагать, что верхние границы Хашина — Штрикмана (8.15) пригодны и для произвольных плоских и пространственных макроизотропных сеток. В самом деле, при заданной доле непроводящих звеньев сетки ее макроскопическая изотропная проводимость будет тем больше, чем компактнее организованы непроводящие кластеры и чем меньше приходится непроводящих кластеров на единицу объема сеточной области. Поэтому для получения верхней оценки эффективной проводимости при фиксированной доле изолятора естественно рассмотреть систему, в которой непроводящие звенья образуют связные сеточные подобласти, объединяющие большое количество узлов. В этом случае новую систему можно считать эквивалентной некоторой континуальной системе, для которой, в свою очередь, верны границы Хашина-Штрикмана. Под эквивалентностью здесь подразумевается аппроксимация дифференциальных уравнений для тока и напряженности в континуальной среде системой уравнений Ома и Кирхгофа, выписанных для сетки. Отсюда следует, что неравенства (8.16) и (8.17) можно использовать для оценки вероятности перколяции произвольных двумерных и трехмерных изотропных сеток.

Приведем результаты сравнения оценок (8.8), (8.16), (8.17) с вероятностью перколяции, найденной в результате прямого математического эксперимента на кубических и квадратных сетках [32]. На рис. 61, 62 изображены зависимости вероятности перколяции K, оценок K_* и K_*^- от доли проводящих звеньев кубической сетки $15\times15\times15$ и квадратной решетки 50×50. Легко видеть, что учет информации об изотропии системы заметно, особенно в двумерном случае, улучшает нижнюю оценку.

В одиннадцатом разделе главы 6 были приведены неравенства (6.303) для компонент тензора эффективной проводимости анизотропной двумерной системы. Положив в левом неравенстве $\sigma_1 \to 0$,

$\sigma_2 = \sigma$, получим из него неравенство для вероятности перколяции анизотропной среды

$$K \geqslant \frac{1}{p} \frac{\sigma(\sigma_1^* + \sigma_2^*) - 2\sigma_1^*\sigma_2^*}{\sigma^2 - \sigma_1^*\sigma_2^*}. \tag{8.18}$$

Если система координат повернута относительно главных осей, в (8.18) следует $\sigma_1^* + \sigma_2^*$ заменить на $SP\sigma^*$, а $\sigma_1^*\sigma_2^*$ — на $\det\sigma^*$, т. е. полученная оценка зависит лишь от инвариантов тензора эффективной проводимости. Зависимость оценки от σ является кажущейся, так как σ_i^* пропорциональны σ. В случае изотропии системы неравенство (8.18) переходит в (8.16).

ФИЛЬТРАЦИЯ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Фильтрация с предельным градиентом в нерегулярных по проницаемости средах приводит к образованию застойных зон, хаотично вкрапленных в область течения.

Рассмотрим движение неньютоновской жидкости в пористой среде, пользуясь следующим приближенным представлением закона фильтрации [1]:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & |\nabla p| < \theta, \\ -\frac{k}{\mu}\nabla p, & |\nabla p| \geqslant \theta. \end{cases} \tag{8.19}$$

Здесь $\vec{v}$ — вектор скорости фильтрации в точке $\vec{r}$; p — давление жидкости; k — проницаемость среды; μ — вязкость жидкости. Величина θ называется обычно градиентом и, как показывает анализ размерностей и экспериментальные исследования [27], ее можно представить в виде

$$\theta = \lambda/\sqrt{k}, \tag{8.20}$$

где λ — коэффициент, пропорциональный напряжению сдвига неньютоновской жидкости.

Если гидродинамическое поле фильтрации имеет особенности типа источников и стоков или среда достаточно неоднородна, в области фильтрации должны существовать застойные зоны, т. е. подобласти, где скорость фильтрации равна нулю. Естественно, что отыскание границ застойных зон — одна из основных задач теории фильтрации неньютоновской жидкости [27]. Если условия задачи достаточно нерегулярны, например среда является неоднородной в малом, но однородной в большом, а сама неоднородность скорее может трактоваться как случайная, отыскание границ множества застойных зон, вкрапленных в течение, не имеет смысла. В этом случае естественно найти вероятность появления застойной области в данной точке или, если случайное поле эргодично, определить площадь или объем застойных зон, приходящихся на единицу площади или объема среды в среднем. Вели-

чину эту естественно назвать коэффициентом охвата. Представляет интерес оценить связь коэффициента охвата с параметрами, характеризующими свойства пористой среды и жидкости и внешними условиями, определяющими течение в целом.

Совершенно очевидно, что решение подобной задачи в точной постановке в общем случае вряд ли осуществимо. Исключением является одномерная («слоистая») модель течения, которая будет подробно рассмотрена позднее. Далее для оценки коэффициента охвата используем некоторые соображения, позволяющие приближенно оценить его величину. В самом деле, известно [1], что в некоторых случаях (например, течение внутри угла) площадь застойной зоны можно найти приближенно, если считать жидкость ньютоновской и вычислить площадь подобласти, внутри которой $|\nabla p| < \theta$. При этом, правда, конфигурация «застойной» области оказывается мало похожей на истинную, но коэффициент охвата оценивается достаточно удовлетворительно. Так как при фильтрации неньютоновской жидкости в среде со случайными неоднородностями конфигурация застойных зон несущественна, описанный эффект, по-видимому, позволяет построить приближенную схему расчета коэффициента охвата. При этом, очевидно, охваченными фильтрацией следует считать подобласти, где поле модуля градиента давления совершает «выбросы» за уровень θ. Математическое ожидание отношения площади или объема таких подобластей ко всей площади или объему области фильтрации и есть коэффициент охвата. Следует отметить, что условие охвата $|\nabla p| \geqslant \theta$ неудобно для анализа. Если его возвести в квадрат и использовать (8.20), то легко записать эквивалентное неравенство

$$E \geqslant \lambda^2/\mu, \tag{8.21}$$

где E — энергия, отдаваемая потоком в единичном объеме за единицу времени.

Как известно, энергия определяется из соотношения

$$E = -\vec{v}\nabla p \tag{8.22}$$

и всегда неотрицательна.

Так, проницаемость среды случайна, энергия потока также распределена случайно и если $f(E, \vec{r})$ — плотность распределения этой энергии, то вероятность неравенства (8.21) или коэффициент охвата имеет вид

$$c = \int_{\lambda^2/\mu}^{\infty} f(E, \vec{r})\, dE. \tag{8.23}$$

Поскольку установить связь плотности f с параметрами потока удается лишь в слоистой модели, определим непосредственно среднюю диссипируемую энергию и ее дисперсию, а затем примем некоторую гипотезу о виде функции f.

Для определенности рассмотрим фильтрационное течение в неограниченной среде трех измерений, проницаемость которой является *однородной и изотропной случайной функцией* координат. Будем считать, что задан постоянный средний градиент давления ∇p_0. Для упрощения анализа совместим ось x декартовой системы координат с вектором среднего градиента. При этих условиях дисперсия диссипируемой энергии имеет вид (см. главу 5)

$$<E'^2>=<|E-<E>|^2>=\frac{7D}{15\mu^2}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^4. \tag{8.24}$$

Для средней энергии имеем

$$<E>=\frac{k^*}{\mu}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^2, \tag{8.25}$$

где k^* — эффективная проницаемость неоднородной среды.

Как показано в главе 6, ее можно записать следующим образом:

$$k^*=k_0(1+\zeta^2/3)^{-1},\quad \zeta^2=D/k_0^2. \tag{8.26}$$

Далее примем, что энергия распределена логнормально, т. е.

$$f(E)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}E\sigma}\exp\left[-\frac{(\ln E-a)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{8.27}$$

где $a=<\ln E>$, $\sigma^2=<(\ln E-a)^2>$.

Так для распределения (8.27) выполняется равенство

$$<E^n>=\exp[na+n^2\sigma^2/2], \tag{8.28}$$

удается выразить параметры a и σ^2 через выписанные $<E>$ и E'^2

$$a=\frac{1}{2}\ln\frac{<E>^2}{1+<E'^2>/<E>^2},\quad \sigma^2=\ln(1+<E'^2>/<E>^2). \tag{8.29}$$

Располагая параметрами a и σ, легко вычислить коэффициент охвата. Проинтегрировав (8.23), после преобразований получим

$$c=\frac{1}{2}(1-\operatorname{erf}\alpha),$$

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\ln\varphi(1+\zeta^2/3)\sqrt{1+\frac{7}{15}\zeta^2(1+\zeta^2/3)^2}}{\sqrt{\ln\left[1+\frac{7}{15}\zeta^2(1+\zeta^2/3)^2\right]}},\quad \varphi=\frac{\lambda^2}{k_0\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)^2}, \tag{8.30}$$

где символом $\operatorname{erf}\alpha$ обозначен интеграл вероятностей

$$\operatorname{erf}\alpha=2\pi^{-1/2}\int_0^\alpha e^{-z^2}dz.$$

На рис. 63 представлены кривые $c=c(\varphi,\ \zeta)$. Уместно отметить, что при $\zeta=0$ функция $c(\varphi)=1$ при $\varphi<1$ и $c(\varphi)=0$ при $\varphi>1$. Следует добавить, что если при $\varphi\leqslant 1$ увеличение ζ снижает коэффициент охвата c, то при $\varphi>1$ картина иная. Для любого φ существует ξ_0, разделяющее области роста и убывания коэффициента a.

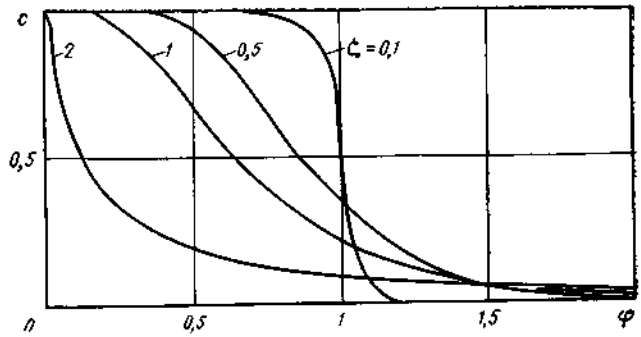


Рис. 63. Зависимость коэффициента охвата c от параметра φ при различных коэффициентах вариации проницаемости ζ

В интервале $(0, \zeta_0)$ охват растет, в (ζ_0, ∞) убывает. Иными словами, умеренная неоднородность ($\zeta \ll \zeta_0$) при фиксированном k «разбалтывает» энергию и создает условия для ее выброса за критический уровень, т. е. увеличивает охват. Однако при $\zeta > \zeta_0$ убывание средней энергии компенсирует увеличение разброса, интенсивность выбросов за уровень снижается.

Располагая коэффициентом охвата c, можно оценить поправку к эффективной проницаемости k^*, вызываемую наличием застойных зон. Будем считать, что в матрицу проницаемости k^* вкраплены с вероятностью $1 - c$ включения нулевой проницаемости. При этом предполагается, что застойные зоны распределены более или менее равномерно по областям повышенной и пониженной проницаемости. Основанием для этого является невысокое значение коэффициента корреляции проницаемости и энергии, оказавшееся равным 0,49.

Очевидно, что средняя проницаемость системы матрица — включения составляет $k_0 = k^* c$, а дисперсия проницаемости $D_1 = k^{*2} c\,(1 - c)$. Используя формулу (8.26), получим эффективную проводимость среды для неньютоновской жидкости k^{**}

$$k^{**} = k^* 3c^2 (1 + 2c)^{-1}. \tag{8.31}$$

Таким образом, в неоднородной среде фильтрацию можно описать законом Дарси $\vec{v} = -(k^{**}/\mu)\,\nabla p$, но коэффициент эффективной проницаемости зависит от k_0, ζ, φ. На рис. 64 приведены кривые $k^{**}/k^* = \nu(\varphi, \zeta)$. Легко видеть, что при $\zeta = 0$ функция $\nu(\varphi, \zeta)$ имеет вид

$$\nu(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi < 1, \\ 0, & \varphi > 1. \end{cases}$$

По-видимому, расчет эффективной проводимости среды с застойными зонами можно уточнить, применяя результаты метода самосогласованного поля. Однако поскольку вся схема расчета, особенно учет нелинейности, предполагает малость возмущений,

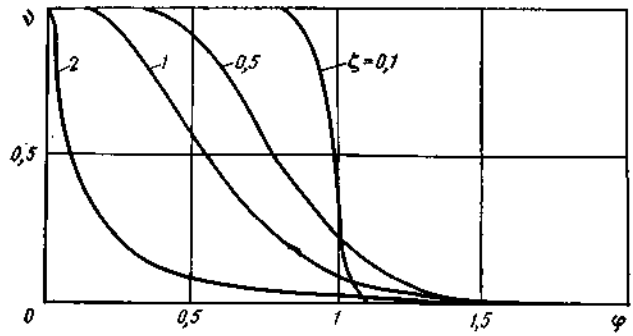


Рис. 64. Зависимость безразмерной эффективной проницаемости области с застойными зонами ν от параметра φ при различных коэффициентах вариации проницаемости ξ

т. е. неоднородности, вносимой дополнительно застойными зонами, такое уточнение вряд ли целесообразно.

Аналогично можно рассмотреть плоскую задачу фильтрации неньютоновской жидкости в среде со случайной неоднородностью. Опуская выкладки, вполне аналогичные приведенным, запишем конечные соотношения для коэффициента охвата

$$c = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}\beta), \tag{8.32}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln\varphi\,(1+\zeta^2/2)\sqrt{1+\rho\zeta^2\,(1+\zeta^2/2)^2}}{\sqrt{\ln\left[1+\rho\zeta^2\,(1+\zeta^2/2)^2\right]}}, \quad \rho = (\pi-2)/\pi.$$

Для функции ν получим

$$\nu = 2c^2\,(1+c)^{-1}. \tag{8.33}$$

Следует учесть, что эффективная проницаемость при плоской фильтрации отлична от (8.26) и имеет вид

$$k^* = k_0\,(1+\zeta^2/2)^{-1}.$$

Как показывают расчеты по формулам (8.32) и (8.33), кривые $c(\varphi)$ и $\nu(\varphi)$ в случае плоской задачи имеют тот же вид, что и аналогичные зависимости, изображенные на рис. 63, 64 и соответствующие трехмерной фильтрации. Однако в плоском случае функции c и ν убывают несколько быстрее, что объясняется повышением роли застойных зон, связанных с понижением размерности пространства.

Рассмотрим одномерную фильтрацию в слоистой системе, в которой каждый слой имеет постоянную проницаемость и единичную толщину. Пусть $f(k)$ — плотность распределения проницаемости слоев. Зададим в каждом из них один и тот же постоянный градиент давления $\partial p_0/\partial x$. Тогда энергия, отдаваемая в слое, равна $E = k\,(\partial p_0/\partial x)^2/\mu$, и условие охвата слоя фильтрацией имеет вид

$$k \geqslant \lambda^2/(\partial p_0/\partial x)^2 = k_{0\varphi}. \tag{8.34}$$

Очевидно, коэффициент охвата всей слоистой системы можно записать следующим образом:

$$c = \int_{k_*\varphi}^{\infty} f(k)\, dk. \tag{8.35}$$

Предполагая, что энергия, а следовательно и проницаемость, распределены логнормально, легко получить

$$c = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}\gamma), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln\varphi \sqrt{1+\zeta^2}}{\sqrt{\ln(1+\zeta^2)}}. \tag{8.36}$$

Эффективная проницаемость слоистой системы для неньютоновской жидкости

$$k^{**} = \int_{k_*\varphi}^{\infty} k f(k)\, dk \tag{8.37}$$

и представима после вычислений в виде

$$k^{**} = k^* \nu,$$

$$\nu = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}\delta), \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln\varphi - \ln\sqrt{1+\zeta^2}}{\sqrt{\ln(1+\zeta^2)}}. \tag{8.38}$$

Остается добавить, что в одномерном случае $k^* = k_0$. Зависимости $c(\varphi)$ и $\nu(\varphi)$ изображены на рис. 65, 66. Если кривая $c(\varphi)$ имеет тот же вид, что и в случае плоского и пространственного течения, то $\nu(\varphi)$ при $\xi \neq 0$ значительно отличается от аналогичных кривых (см. рис. 64). Интересным обстоятельством является рост ν с возрастанием ζ в области $\varphi > 1$. Иными словами, даже сильная неоднородность (большие ζ) приводит к росту эффективной проницаемости, в то время как коэффициент охвата убывает. Причина такого эффекта — возрастание количества жидкости, фильтрующейся через высокопроницаемые слои, общее количество которых с ростом ζ при фиксированном k_0 убывает. Следует отметить, что метод замены течения с предельным градиентом, описываемым соотношением (8.19), ньютоновским течением, реализует в пространственном и плоском случаях приближенную теорию. В одномерном случае такой подход приводит к точному решению.

Аналогично можно изучить одномерную задачу при более сложном законе фильтрации [27]

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & |\nabla p| < \theta, \\ -\dfrac{k}{\mu}\left(\nabla p - \dfrac{\nabla p}{|\nabla p|}\theta\right), & |\nabla p| \geqslant \theta. \end{cases} \tag{8.39}$$

В одномерном случае из (8.39) при $|\partial p_0/\partial x| \geqslant \theta$ имеем

$$v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda\sqrt{k}}{\mu} \operatorname{sign}\frac{\partial p_0}{\partial x}. \tag{8.40}$$

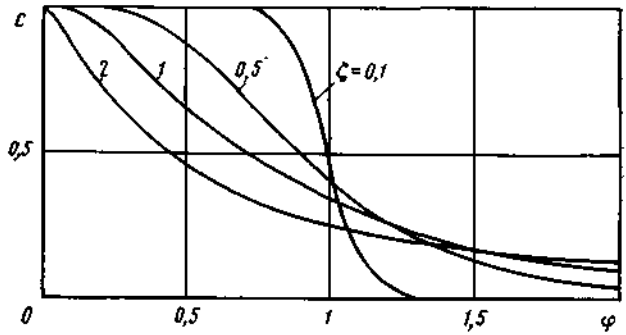


Рис. 65. Зависимость коэффициента охвата слоистой системы c от параметра φ при различных коэффициентах вариации проницаемости ξ

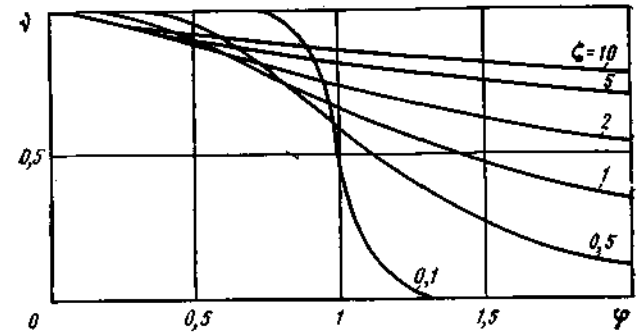


Рис. 66. Зависимость безразмерной эффективной проницаемости слоистой системы ν от параметра φ при различных коэффициентах варнации проницаемости ζ

Считая, что $\ln k$ распределен нормально, осредним (8.40) в интервале $k_0\varphi \leqslant k < \infty$, т. е. по охваченной фильтрацией части слоистой системы. После преобразований получим

$$\langle v \rangle = \frac{k_1^{**}}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \tag{8.41}$$

где

$$k_1^{**} = k_0 (\nu - \nu_1), \quad \nu_1 = \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt[8]{1+\zeta^2}} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{\ln \varphi}{\sqrt{2 \ln (1+\zeta^2)}}\right]$$

Нетрудно убедиться, что ν_1 является поправкой к эффективной проницаемости (8.38), обусловленной введением закона фильтрации в форме (8.39). График функции $\nu - \nu_1$ представлен на рис. 67. Сопоставление рис. 66, 67 показывает, что дополнительный по сравнению с (8.19) член в уравнении (8.39) приводит к существенному снижению эффективной проницаемости, особенно при малых ζ.

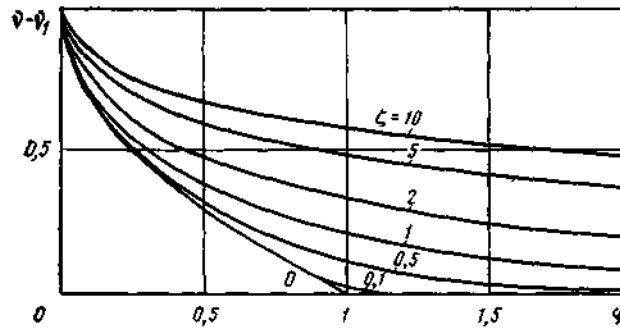


Рис. 67. Зависимость безразмерной эффективной проницаемости слоистой системы $\nu - \nu_1$ от параметра φ при различных коэффициентах вариации проницаемости ζ и законе фильтрации (8.39)

Следует отметить, что поскольку в одномерной задаче охват однозначно определяется условием $|dp_0/dx| \geqslant \theta$ и не зависит от вида закона фильтрации, вычисленный ранее коэффициент c, определяемый формулой (8.36) и рис. 65, применим и в рассматриваемом случае.

ГЛАВА 9

ДИСПЕРСИЯ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Известно, что нерегулярность реальных пористых структур и ее следствие — нерегулярность поля скоростей являются причиной дисперсии жидких масс в процессе фильтрационного переноса. Явление это имеет важное прикладное значение. Достаточно упомянуть проблемы использования различных добавок к воде при заводнении нефтяных месторождений, захоронении радиоактивных отходов атомной промышленности, переноса теплоты фильтрационным потоком, хроматографии, чтобы стала очевидной важность изучения закономерностей переноса примеси фильтрационным потоком. Следует добавить, что знание процесса переноса способствует решению обратных задач, дает возможность исследовать структуру потока и среды.

Выделим мысленно в фильтрационном потоке некоторый объем, пусть для простоты это будет шар, и проследим за жидкими частицами, находящимися в первоначальный момент времени в этом объеме. Говоря о частицах жидкости, очевидно следует уточнить их характерную величину. В данном случае естественно ввести в рассмотрение жидкие частицы двух масштабов. Первый из масштабов должен быть связан с микроструктурой пористой среды и иметь величину порядка характерного размера пор. Второй масштаб должен быть связан с объединением большого числа частиц микромасштаба и скорее иметь порядок масштаба неоднородности проницаемости пористой среды. В нашем мысленном

эксперименте мы пока рассмотрим частицы первого масштаба — микромасштаба, заключенные первоначально в шар, имеющий размеры второго масштаба — макромасштаба.

Нерегулярность поля скоростей в межпоровом пространстве приведет к тому, что микрочастицы через некоторое время займут новые положения в пространстве, взаимные расстояния между ними изменятся. Следовательно, первоначальная макрочастица — шар будет деформирована и, хотя объем ее останется неизменным, форма может существенно измениться. Скорее всего это будет чрезвычайно нерегулярная по форме область, ее характерные размеры могут существенно отличаться от диаметра первоначального шара и тем не менее имеет смысл считать, что это прежняя макрочастица, правда деформированная.

Если сменить уровень рассмотрения и следить за многими макрочастицами, также первоначально заполняющими некоторый шар, то их индивидуальная «судьба» будет скорее определяться полем истинной скорости фильтрации, т. е. осредненным полем скорости жидких микрочастиц. Очевидно, диспергирующие свойства осредненного поля скорости главным образом зависят от изменчивости макроскопических свойств пористого пространства, в первую очередь от нерегулярности полей проницаемости и пористости.

Очевидно, проследить за жидкой частицей можно лишь каким-то образом выделив ее, «пометив» каким-то признаком, отличающим частицу от других подобных частиц. На практике для этого используются красители, меченые атомы и т. п. Очевидно, внесение «меток» не должно никаким образом влиять на гидродинамические свойства частиц. Именно в этом смысле говорят о динамически нейтральной примеси, переносимой потоком. При этом следует учитывать, что внесение в движущуюся жидкость примеси порождает еще один механизм ее распространения — молекулярную диффузию, осложняемую адсорбцией и десорбцией примеси.

Таким образом, перенос жидких частиц определяется довольно сложным механизмом, и для его рационального описания в силу нерегулярности условий естественно привлечь статистические методы. При этом объектом исследования становятся регулярные характеристики многочастичных систем — концентрации, а целью исследования — получение уравнений, связывающих концентрации с макроскопическими параметрами фильтрационных потоков, неоднородностью их структуры.

Отметим, что исследования дисперсионных эффектов в фильтрационных течениях методологически естественно разделяются в соответствии с уровнем рассмотрения. Так, поскольку кинематика жидких потоков в межпоровом пространстве вследствие нерегулярности внутренних границ не имеет в настоящее время рационального описания, уравнения дисперсионного переноса на микроуровне неизбежно носят эмпирический характер. Не являются исключением и попытки описания дисперсии при помощи различного рода распределений «струек» в межпоровом пространстве, сопровождающиеся принятием немотивированных гипотез.

Иначе обстоит дело при рассмотрении макроуровня. В этом случае можно в принципе найти все характеристики поля скоростей в средах со случайными неоднородностями, можно рассмотреть дисперсию в поле случайных скоростей и получить усредненные уравнения макропроцесса [36]. Именно этому аспекту процесса фильтрационной дисперсии и будет посвящено дальнейшее изложение. Что же касается дисперсии на микроуровне, теоретические основы ее анализа, начинавшиеся работами А. Шейдеггера, В. Николаевского, П. Сафмана, в достаточной степни отражены в работах [23, 24, 27, 47, 49], где приведены основные уравнения, дан анализ экспериментов и некоторых задач.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИСПЕРСИИ

Перейдем к рассмотрению рассеяния примеси потоком, поле скоростей которого в достаточной мере нерегулярно. Естественно, что количественное описание этого явления по вполне понятным причинам не может дать траекторию движения каждой индивидуальной частицы примеси, в лучшем случае можно надеяться описать усредненное «поведение» многих частиц, т. е. поля средней концентрации. Таким образом, далее под задачей описания процесса фильтрационной дисперсии будет пониматься нахождение зависимостей между полем средней концентрации и статистическими характеристиками поля скоростей. Эти связи могут иметь вид дифференциальных или интегродифференциальных уравнений, коэффициенты или ядра которых определяются моментными функциями поля скорости.

Подобный подход получил широкое развитие при изучении дисперсионных явлений в самых различных областях, например турбулентной диффузии, распространения электромагнитных волн в флуктуирующих средах и т. д. Состояние этих исследований подробно освещено в работах [13, 21, 31].

Пусть в некоторый момент времени t_0 в пространстве зафиксировано распределение примеси и $c_0(\vec{x}, t_0)$ — плотность этого распределения (концентрация). Будем считать функцию $c_0(\vec{x}, t_0)$ заданной и неслучайной.

Перенос жидких частиц полем скорости $\vec{v}$ приведет к изменению начального распределения, и в момент времени t оно перейдет в $c(\vec{x}, t)$. Специфика рассматриваемых фильтрационных процессов связана с тем, что нерегулярность поля скорости порождена неоднородностью среды и, следовательно, не зависит от времени. Таким образом, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$, и в рамках принятой модели поле скорости является векторной случайной функцией координат. Поэтому поле $c(\vec{x}, t)$ можно представить в виде

$$c(\vec{x}, t,) = \Phi[\vec{v}(\vec{x}), t] c_0(\vec{x}, t_0), \tag{9.1}$$

где $\Phi[\vec{v}(\vec{x}), t]$ — некоторый оператор, очевидно случайный, так как определен над случайным полем $\vec{v}(\vec{x})$.

Поскольку примесь динамически нейтральна и ее перенос не влияет на поле $\vec{v}$, оператор $\Phi[\vec{v}(\vec{x}), t]$ линеен.

Осреднив (9.1) по ансамблю реализаций, получим

$$u(\vec{x}, t) = \langle c(\vec{x}, t) \rangle = \langle \Phi[\vec{v}(\vec{x}), t] \rangle c_0(\vec{x}, t), \tag{9.2}$$

и, следовательно, осредненная концентрация $u(\vec{x}, t)$ удовлетворяет некоторому линейному уравнению, для конкретизации которого следует построить линейный оператор $\langle \Phi[\vec{v}(\vec{x}), t] \rangle$.

Пусть в момент времени t_0 вся примесь, а ее общее количество примем за единицу, сосредоточена в точке $\vec{X} = \vec{x}$, т. е. $c_0(\vec{X}, t_0) = \delta(\vec{X} - \vec{x})$. Поскольку молекулярная диффузия игнорируется, примесь будет в любой момент времени сосредоточена в одной точке, которая в момент t_0 находилась в $\vec{x}$, а далее транспортировалась полем скоростей. Следовательно

$$c(\vec{X}, t) = \delta[\vec{X} - X(\vec{x}, t_0, t)]. \tag{9.3}$$

Усреднив обе части (9.3), получим

$$u(\vec{X}, t) = \langle \delta[\vec{X} - \vec{X}(\vec{x}, t_0, t)] \rangle. \tag{9.4}$$

Нетрудно понять, что правая часть (9.4) есть плотность вероятности события, заключающегося в том, что «жидкая» частица, находившаяся в момент времени t_0 в точке пространства $\vec{x}$, в момент времени t окажется в точке $\vec{X}$. Обозначив эту плотность

$$f(\vec{X}, t, \vec{x}, t_0) = \langle \delta[\vec{X} - \vec{X}(\vec{x}, t_0, t)] \rangle \tag{9.5}$$

и сравнив (9.2), (9.4) и (9.5), получим

$$\langle \Phi[\vec{v}(\vec{x}), t] \rangle \delta(\vec{X} - \vec{x}) = f(\vec{X}, t, \vec{x}, t_0), \tag{9.6}$$

т. е. $\langle \Phi \rangle$ — интегральный оператор с ядром f

$$\langle \Phi \rangle = \int f(\vec{X}, t, \vec{x}, t_0)\, dx. \tag{9.7}$$

Поэтому при произвольном начальном распределении

$$u(\vec{X}, t) = \int f(\vec{X}, t, \vec{x}, t_0)\, c_0(\vec{x}, t_0)\, dx \tag{9.8}$$

и, следовательно, для определения осредненной концентрации $u(x, t)$ нужно решить фундаментальную задачу — найти плотность f, которую можно истолковать как среднее поле концентрации мгновенного точечного источника единичной продуктивности, рассеянного полем

случайной скорости $\vec{v}(\vec{x})$. Такая трактовка плотности f позволяет записать формальное выражение для среднего поля концентрации примеси, продуцируемой распределенными в пространстве источниками. Если $\varphi(x, t)$ — заданная плотность неслучайного распределения поступления примеси, то поле средней концентрации при произвольном начальном распределении $c_0(x, t_0)$ имеет вид

$$u(\vec{x}, t) = \int f(\vec{X}, t, \vec{x}, t_0) c_0(\vec{x}, t_0) dx + \\ + \int\int_{t_0}^{t} f(\vec{X}, t, \vec{x}, \tau) \varphi(\vec{x}, \tau) dx d\tau. \qquad (9.9)$$

Таким образом, для полного решения общей задачи — определения поля средней концентрации $u(x, t)$ следует определить функцию f, которую естественно назвать функцией Грина задачи переноса в поле случайной скорости.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИСПЕРСИИ

Рассмотрим движение индивидуальных частиц, переносимых фильтрационным потоком. Пусть положение частицы в пространстве определяется некоторым вектором $\vec{X}$, который по мере перемещения частицы изменяется и, следовательно, является вектор-функцией времени. Чтобы отличить данную частицу от ей подобных, введем дополнительную независимую переменную — вектор $\vec{x}$, который в дальнейшем отождествим с $\vec{X}$ в момент времени t_0. Таким образом, векторное поле $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ определяет семейство траекторий частиц, положение которых в момент времени t_0 задавалось векторным полем $\vec{x} = \vec{X}(\vec{x}, t_0)$. Подобное задание потока жидкости носит название лагранжевого описания. В отличие от эйлерового описания, для которого независимыми переменными являются координаты фиксированных точек пространства и время и, следовательно, течение изучается с точки зрения неподвижного наблюдателя, лагранжево описание естественно трактовать как изучение потока наблюдателем, движущимся вместе с жидкостью. Независимыми переменными в этом случае являются лагранжева переменная $\vec{x}$ и время t. Полное лагранжево описание заключается в том, что характеристики потока (динамические, кинематические) выражены через новые переменные. В новых переменных формулируются основные законы сохранения и динамические соотношения.

Формально процедура перехода от эйлерова к лагранжевому описанию сводится к замене независимых переменных в основных уравнениях. Определим лагранжеву скорость перемещения частицы из очевидного соотношения

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \partial \vec{X}(\vec{x}, t)/\partial t \qquad (9.10)$$

и зафиксируем связь лагранжевый и эйлеровой скоростей

$$\vec{V}(\vec{x},\ t) = \vec{v}[\vec{X}(\vec{x},\ t),\ t]. \tag{9.11}$$

Последняя формула означает, что транспортируемая потоком, плывущая по течению жидкая частица в каждый момент времени имеет скорость той точки потока, в которой она в этот момент находится. Отсюда очевидно, что если поле эйлеровой скорости стационарно и однородно, то среднее значение лагранжевой скорости постоянно.

Введем в рассмотрение корреляционный тензор лагранжевой скорости

$$B_{ij}^{L}(\vec{x},\ t_1,\ t_2) = \langle V_i(\vec{x},\ t_1)\, V_j'(\vec{x},\ t_2)\rangle . \tag{9.12}$$

Здесь индексом (L) отмечена «лагранжевость» корреляционного тензора B_{ij}; моменты времени t_2 и t_1 удовлетворяют неравенству $t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$, а флуктуация V_i' определяется так

$$V_i'(\vec{x},\ t) = V_i(\vec{x},\ t) - \langle V_i(\vec{x},\ t)\rangle . \tag{9.13}$$

Иными словами, тензор B_{ij}^{L} является корреляцией компонент скорости одной и той же частицы в разные моменты времени t_2 и t_1 при условии, что в момент времени t_0 частица находилась в точке x. При $t_2 = t_1 = t$ формула (9.12) определяет корреляции компонент в один и тот же момент времени

$$B_{ij}^{(L)}(\vec{x},\ t) = \langle V_i'(\vec{x},\ t)\, V_j'(\vec{x},\ t)\rangle . \tag{9.14}$$

При $i = j$ компоненты $B^{(L)}$ являются дисперсиями компонент лагранжевой скорости, при $i \neq j$ — их взаимными корреляциями. Сравнив (9.14) с (9.11) и (9.13), легко убедиться, что тензор (9.14) совпадает с аналогичной характеристикой эйлерового поля скоростей

$$B_{ij}^{(L)}(\vec{x},\ t_0) = B_{ij}(\vec{x},\ t_0).$$

Отметим еще одно важное свойство тензора $B^{(L)}$. Если поле эйлеровой скорости не зависит от времени и статистически однородно по пространству, тензор $B^{(L)}$ не зависит от $\vec{x}$, а поскольку $V'(\vec{x},\ t)$ будет стационарной функцией времени, тензор $B^{(L)}$ можно представить в виде

$$B_{ij}^{(L)} = B_{ij}^{(L)}(t_2 - t_1). \tag{9.15}$$

Поскольку $B_{ij}^{(L)}(0) = B_{ij}(0)$, тензор корреляций лагранжевой скорости можно пронормировать и записать в виде

$$B_{ij}^{(L)} = [B_{ii}(0)\, B_{jj}(0)]^{\frac{1}{2}}\, R_{ij}^{(L)}(t_2 - t_1). \tag{9.16}$$

Удобной характеристикой быстроты затухания корреляций являются лагранжевы времена корреляции

$$T_i = \int_0^\infty R_{ii}^{(L)}(s)\,ds. \tag{9.17}$$

Так как эти времена для $i = 1, 2, 3$ могут быть различными, говоря далее о лагранжевом временном масштабе T, будем иметь в виду наибольшее из T_i.

Описав в рамках корреляционной теории лагранжево поле скоростей, перейдем к аналогичному описанию перемещений жидкой частицы, переносимой потоком. Пусть в момент t_0 положение частицы определяется вектором $\vec{x}$. Тогда в момент $t_0 + \tau$ она окажется в точке $\vec{X}(\vec{x}, t_0 + \tau)$, а ее смещение за время τ — вектор $\vec{Y}(\tau) = \vec{X}(\vec{x}, t_0 + \tau) - \vec{x}$ в соответствии с (9.10) имеет вид

$$\vec{Y}(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{V}(\vec{x}, t)\,dt. \tag{9.18}$$

Для среднего смещения из (9.18) имеем

$$\langle \vec{Y}(\tau) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \langle \vec{V}(\vec{x}, t) \rangle\,dt \tag{9.19}$$

и, следовательно, для однородных полей эйлеровой скорости при $\langle \vec{V} \rangle = \langle \vec{u} \rangle = \vec{u}$,

$$\langle \vec{Y}(\tau) \rangle = \vec{u}_0 \tau. \tag{9.20}$$

Из (9.18) и (9.19) следует формула для флуктуаций смещения

$$\vec{Y}'(\tau) = \vec{Y}(\tau) - \langle Y(\tau) \rangle, \quad Y'(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{V}'(\vec{x}, t)\,dt. \tag{9.21}$$

Введем в рассмотрение корреляционный тензор вектора смещений

$$D_{ij}(\tau) = \langle Y_i(\tau)\, Y_j(\tau) \rangle. \tag{9.22}$$

Этот тензор, называемый обычно тензором дисперсии смещений жидкой частицы [21], при помощи (9.21) представим в виде

$$D_{ij}(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \langle V_i(\vec{x}, t_1)\, V_j(\vec{x}, t_2) \rangle\,dt_1 dt_2 \tag{9.23}$$

или, используя (9.12) и (9.16), запишем

$$D_{ij}(\tau) = [B_{ii}(0)\, B_{jj}(0)]^{1/2} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} R_{ij}^{(L)}(t_2 - t_1)\,dt_1 dt_2. \tag{9.24}$$

Вводя новые переменные $s = t_2 - t_1$, $t = (t_1 + t_2)/2$, выполнив интегрирование по t, получим формулу Бэтчелора [21]

$$D_{ij}(\tau) = [B_{ii}(0)\, B_{jj}(0)]^{1/2} \int_0^\tau (\tau - s)\,[R_{ij}^{L}(s) + R_{ji}^{(L)}(s)]\,ds. \tag{9.25}$$

При $i = j$ из (9.25) имеем

$$D_{ii}(\tau) = 2B_{ii}(0)\int_0^\tau (\tau - s)\, R_{ii}^{L}(s)\, ds. \qquad (9.26)$$

Для малых τ, для которых допустимо считать $R_{ii}^{(L)}(\tau) \approx 1$, из (9.26) следует

$$D_{ii}(\tau) = B_{ii}(0)\,\tau^2. \qquad (9.27)$$

Предполагая, что $R^{(L)}(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$ настолько быстро, что помимо конечности лагранжевых времен корреляции T_i конечен интеграл

$$\theta_i = \int_0^\infty sR_{ii}^{(L)}(s)\, ds. \qquad (9.28)$$

При $\tau \gg T_i$ из (9.26) получим асимптотическое представление

$$D_{ii}(\tau) = 2B_{ii}(0)\,(T_i\tau - \theta_i). \qquad (9.29)$$

При $\tau \gg \theta_i/T_i$ формулу (9.29) запишем в виде

$$D_{ii}(\tau) = 2B_{ii}(0)\,T_i\tau. \qquad (9.30)$$

Таким образом, зависимость дисперсии смещения от τ при малых τ квадратична, а при больших τ линейна. Как указано в [21], если функция $R_{ii}^{(L)}$ неотрицательна при любых значениях s, форма этой функции слабо влияет на зависимость D_{ii} от τ. Асимптотические формулы (9.27) и (9.30) достаточно хорошо выполняются при следующих условиях: $\tau \leqslant T_i$ — для случая малых τ и, соответственно $\tau \geqslant 5T_i$ — для больших τ.

Итак, дисперсия смещений жидкой частицы за достаточно большое время пропорциональна дисперсии эйлеровой скорости B_{ii} (0), лагранжевому времени корреляции T_i и времени блуждания. Среднее смещение частицы пропорционально средней эйлеровой скорости и времени блуждания. Таковы результаты анализа первых двух моментов вектора случайных смещений жидкой частицы. Для того чтобы использовать эти моменты для количественных оценок, необходимо указать способ определения лагранжевых времен корреляции T_i по информации об эйлеровом поле скоростей. К сожалению, этот вопрос практически не изучен, нет надежных экспериментальных данных, не имеется адекватной теории. Аналогичная ситуация в теории турбулентности описана в работе [21]. Констатируя отсутствие эффективных методов измерения лагранжевых статистических характеристик турбулентности, авторы приводят метод Ламли, дающий в принципе возможность найти моменты лагранжевых характеристик в виде бесконечного ряда по степеням $(t - t_0)$, коэффициентами в котором являются громоздкие комбинации эйлеровых одноточечных характеристик. Однако сложность метода Ламли не позволила построить разложение высокого порядка, вычисленные же члены до порядка $(t - t_0)^2$ дают представление о лагранжевых характеристиках

лишь для малых времен. В [21] анализируются также многочисленные попытки определения лагранжевых корреляций при помощи различных эмпирических и полуэмпирических гипотез. Анализ приводит авторов к выводу об отсутствии конструктивной и надежной теории.

Учитывая сказанное, попытаемся оценить порядок лагранжевого временного масштаба, исходя из соображений теории размерности. Приведенный в главе 5 анализ поля скорости показал, что масштаб корреляции эйлеровой скорости по порядку совпадает с a — масштабом корреляции проницаемости. Поскольку поле эйлеровых скоростей мы условились считать установившимся, эйлерово время корреляции естественно считать неограниченным, так как все жидкие частицы, проходящие в разное время данную точку пространства, имеют одну и ту же скорость. С другой стороны, $T = am/u_0$ — единственный параметр задачи, имеющий размерность времени, естественно считать лагранжевым масштабом дисперсии примеси на макроскопических неоднородностях. Аналогично, параметр микроструктуры $T_1 = m\sqrt{k_0}/u_0$ с этой же точки зрения естественно считать лагранжевым масштабом дисперсии примеси на микронеоднородностях масштаба пор.

Таким образом, принятие гипотезы о порядке величины лагранжевого временного масштаба полностью замыкает корреляционное описание поля вектора смещений и позволяет перейти к построению уравнений для плотности вероятностей $f(\vec{X}, t, \vec{x}, t_0)$. При этом, очевидно, не обойтись без принятия дополнительных предположений о структуре векторного поля смещений, поскольку первых двух моментов, относительно которых мы имеем определенную информацию, достаточно для исчерпывающего описания только некоторых специальных полей, например гауссовых.

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ

Далее мы будем предполагать, что процесс перемещений или, как часто говорят, блужданий жидкой частицы, является марковским случайным процессом. Теория марковских процессов — один из наиболее изученных разделов теории вероятностей, обстоятельное ее изложение можно найти, например, в работе [7]. Тем не менее мы приведем здесь некоторую информацию об этих процессах, достаточную для первоначального знакомства с предметом и понимания «происхождения» основных уравнений, получаемых далее при изучении дисперсии примеси.

Итак, пусть $\vec{X}(t)$ — случайный векторный процесс, компоненты которого $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$ являются случайными функциями времени. Рассмотрим момент времени $t_0 < t$ и введем условную плотность вероятности того, что процесс, имевший в момент времени

t_0 значение $\vec{x}(t_0)$, примет в момент t значение $\vec{x}(t)$. Обозначим эту плотность символом

$$f(\vec{X},\ t;\ \vec{x},\ t_0), \tag{9.31}$$

в котором состояние процесса $\vec{x}$, реализованное в настоящий момент t_0, отделено от состояния $\vec{X}$, вероятность осуществления которого в будущий момент времени t требуется оценить при помощи плотности f.

По определению процесс $\vec{X}(t)$ является марковским, если плотность (9.31) не зависит от того, какие значения процесс принимал в моменты времени, предшествующие моменту t_0. Иными словами, вероятность состояния в будущем ($t > t_0$) не зависит от прошлого, а целиком определяется тем, что в настоящий момент t_0 процесс имеет значение $\vec{x}(t_0)$. Очевидно, плотность (9.31) исчерпывающим образом характеризует процесс. Ниже приведены ее некоторые свойства.

1. Неотрицательность

$$f(\vec{X},\ t;\ \vec{x},\ t_0). \tag{9.32}$$

2. При $t > t_0$ вероятность того, что процесс примет какое-либо значение равна единице

$$\int f(\vec{X},\ t;\ \vec{x},\ t_0)\,d\vec{X} = 1. \tag{9.33}$$

3. При $t = t_0$ и $\vec{X} \neq \vec{x}$ очевидно, что $f(\vec{X},\ t_0;\ \vec{x},\ t_0) = 0$, так как процесс может принимать в данный момент одно значение. Но так как выполняется и условие (9.33), то

$$f(\vec{X},\ t;\ \vec{x},\ t_0)|_{t=t_0} = \delta(\vec{X} - \vec{x}). \tag{9.34}$$

4. Пусть t_0, s и t — моменты времени такие, что $t_0 < s < t$, а $\vec{X}(t)$, $\vec{z}(s)$ и $\vec{x}(t_0)$ — значения марковского процесса в эти моменты времени. Плотность вероятности процесса удовлетворяет функциональному уравнению — обобщенному уравнению Маркова

$$f(\vec{X},\ t;\ \vec{x},\ t_0) = \int f(\vec{z},\ s;\ \vec{x},\ t_0)\,f(\vec{X},\ t;\ \vec{z},\ s)\,d\vec{z}. \tag{9.35}$$

Вывод (9.35) состоит в оценке вероятности перехода процесса из состояния $\vec{x}(t_0)$ в область $\vec{X}(t) + d\vec{x}$ двояким путем:

непосредственно

$$f(\vec{X},\ t;\ \vec{x},\ t_0)\,d\vec{x} \tag{9.36}$$

и минуя промежуточное произвольное состояние.

Так как процесс марковский, вероятность двойного шага равна произведению вероятностей шагов

$$d\vec{x}\int f(\vec{z},\ s;\ \vec{x},\ t_0)\,f(\vec{X},\ t,\ z,\ s)\,d\vec{z}. \tag{9.37}$$

Приравнивая (9.36) и (9.37), получим (9.35). Это уравнение иногда называют формулой Смолуховского, Чепмена или Колмогорова.

УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИСПЕРСИИ

Для непрерывных марковских процессов из функционального уравнения Маркова можно получить два дифференциальных уравнения для плотности f, названные первым и вторым уравнениями Колмогорова. В первом уравнении независимыми переменными являются t_0 и $\vec{x}$, т. е. параметры, характеризующие начальное состояние, во втором уравнении независимыми — параметры финального состояния $\vec{X}$ и t.

Опуская вывод уравнений, имеющийся, например, в [7], приведем сами уравнения.

Первое уравнение Колмогорова

Плотность вероятности $f(\vec{X}, t, \vec{x}, t_0)$, рассматриваемая как функция характеристик начального состояния t_0 и $\vec{x}$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}, t_0)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\vec{x}, t_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \qquad (9.38)$$

Коэффициенты уравнения (9.38), т. е. вектор $\vec{a}$ и тензор b_{ij}, определяются равенствами

$$\vec{a}(\vec{x}, t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{<\vec{X}(\vec{x}, t) - \vec{x}>}{t - t_0}, \qquad (9.39)$$

$$b_{ij}(\vec{x}, t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{<[\vec{X}_i(t) - x_i][X_j(t) - x_j]>}{t - t_0}. \qquad (9.40)$$

Уравнение (9.38) иногда называют обратным уравнением Колмогорова.

Второе уравнение Колмогорова

Плотность вероятности $f(\vec{X}, t; \vec{x}, t_0)$ как функция характеристик финального состояния $\vec{X}$ и t удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_i(\vec{x}, t) f] - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[b_{ij}(\vec{x}, t) f] = 0. \qquad (9.41)$$

В этом уравнении коэффициенты $\vec{a}$ и b, как и в случае первого уравнения Колмогорова, определяются равенствами (9.39) и (9.40) с той только разницей, что в последнем случае они зависят от t,

$\vec{x}$. Уравнение (9.41), которое иногда называют прямым уравнением Колмогорова, впервые получено при исследовании броуновского движения и часто в физической литературе связано с именами Эйнштейна, Фоккера, Планка [13].

Рассмотрим подробнее коэффициенты уравнений Колмогорова. Сравнив (9.39) и (9.40) с формулами (9.19) и (9.22), определяющими соответственно среднее смещение частицы и тензор дисперсии смещений, найдем, что

$$\vec{a} = d < \vec{Y}(\tau) > /d\tau, \tag{9.42}$$

$$b_{ij} = dD_{ij}(\tau)/d\tau. \tag{9.43}$$

Легко видеть, что как прямое, так и обратное уравнения Колмогорова относятся к параболическому типу. При рассмотрении стохастических задач такие уравнения принято называть диффузионными.

Физический смысл коэффициента уравнения — вектора $\vec{a}$ очевиден. Он идентичен средней скорости смещения частиц в фильтрационном потоке. Тензор b_{ij} равен скорости изменения тензора дисперсии смещения частиц, далее b_{ij} будем называть тензором фильтрационной дисперсии. Естественно и уравнения Колмогорова при изучении фильтрационного переноса называть уравнениями фильтрационной дисперсии.

Выбор марковской модели блуждания частиц приводит к необходимости отказа от понятия мгновенной скорости частиц. В самом деле, если b_{ij} конечно и отлично от нуля, то за малое время τ в соответствии с (9.43) имеем $<\vec{Y}^2(\tau)> \sim b_{ii}\tau$ и, следовательно, средний квадрат мгновенной скорости $<Y_i^2(\tau)>/\tau^2 = b_{ii}/\tau$ при $\tau \to 0$ неограничен. Это означает, что случайный процесс $\vec{X}(\vec{x}, t)$ для марковской частицы недифференцируем по времени t. Как подчеркивается в [21], в случае турбулентного потока вектор $\vec{x}$ для частиц дифференцируем по времени для всех t по крайней мере дважды, поскольку удовлетворяет лагранжевым уравнениям гидродинамики, содержащим первые и вторые производные. По-видимому, так же обстоит дело и в случае фильтрационного переноса, если при переходе к лагранжевым уравнениям фильтрации включить в рассмотрение инерционные силы, обычно игнорируемые. Тем не менее фильтрационная проблема имеет и свою специфику.

Рассмотрим установившееся фильтрационное течение в неоднородной среде с включениями различной проводимости. Как известно, линии тока на границах включений претерпевают излом и, следовательно, жидкая частица, двигаясь вдоль такой линии тока, в момент пересечения границы включения скачком меняет скорость. Очевидно, функции $\vec{X}(\vec{x}, t)$ этой частицы в такие моменты времени не имеет непрерывной производной первого, а тем более второго порядка. Если среда существенно неоднородна, а именно этот случай и является предметом исследования, наличие

многих границ включений и достаточно большая дисперсия проводимости могут достаточно сильно повлиять на дифференциальные свойства траекторий жидких частиц, сделав их нерегулярными. Учет инерционных сил, по-видимому, позволяет сгладить угловые точки на траекториях, но поскольку эти силы, как правило, малы, нерегулярность траекторий, порожденная нерегулярностью поля проводимости, неустранима.

Таким образом, хотя фильтрационный перенос частиц имеет свои особенности, но, так же как и в турбулентном потоке, локальное поведение жидких частиц существенно отличается от поведения частиц, управляемых марковским процессом. Поэтому марковская частица как модель жидкой частицы реального потока непригодна для детального локального описания ее эволюции в потоке.

Однако совсем иначе обстоит дело с использованием марковских частиц, если несколько модифицировать цель исследования, отказавшись от детального локального моделирования. В самом деле, несуществование мгновенной скорости марковской частицы вытекало из условия (9.43), равносильного пропорциональности ее смещения первой степени τ. Но с другой стороны в соответствии с (9.30) дисперсия смещений реальной жидкой частицы также пропорциональна первой степени τ, но при условии, что $\tau \gg T$ — лагранжевого временно́го масштаба реальной частицы. Таким образом, марковскую частицу можно использовать в качестве модели реальной для оценки дисперсии смещений последней, но, естественно, при ограничении $\tau \gg T$.

Перейдем от рассмотрения процесса $\vec{X}(\vec{x}, t)$ к его изучению лишь в дискретные моменты времени $t = t_n = t_0 + n\tau$ и пусть шаг квантования $\tau \gg T$. Тогда приращения процесса на непересекающихся интервалах длины τ будут слабо коррелированными и скорее всего практически независимыми. Из этого вытекает, что процесс $\vec{X}(\vec{x}, t_n)$ может приближенно считаться последовательностью с независимыми приращениями, которые, как известно [7], являются марковскими. Для переходных вероятностей марковских последовательностей можно получить разностные по времени уравнения с шагом τ. Можно показать, что уравнения Колмогорова (9.38), (9.41) являются дифференциальными приближениями этих разностных уравнений. Отсюда следует возможность использования уравнений Колмогорова для оценки плотности вероятности состояния реальной частицы в любой момент времени t, для которого $t - t_0 \gg T$.

Таким образом, использование марковских частиц в качестве моделей реальных дает возможность построить аналитический аппарат исследования, применение которого ограничено условием

$$t - t_0 \gg T. \tag{9.44}$$

Для решения уравнений Колмогорова их следует дополнить начальными и краевыми условиями. Начнем со второго уравнения

Колмогорова. Естественно $t = t_0$ считать начальным моментом, для которого вектор $\vec{X} = \vec{x}$. Поэтому

$$f(\vec{X}, t; \vec{x}, t_0)|_{t=t_0} = \delta(\vec{X} - \vec{x}). \tag{9.45}$$

Для первого уравнения начальное условие имеет тот же вид, но чтобы выделить независимые переменные t_0 и $\vec{x}$, мы его запишем несколько иначе

$$f(\vec{X}, t; \vec{x}, t_0)|_{t=t_0} = \delta(\vec{x} - \vec{X}). \tag{9.46}$$

Процесс блуждания частиц будем считать стационарным и статистически однородным, что возможно только в неограниченной области. Потребуем выполнения естественного для такой области условия: плотность f должна стремиться на бесконечности к нулю. Наконец, поскольку f — плотность, должно выполняться условие нормировки (9.33) как при интегрировании плотности в пространстве $\vec{X}$, так и $\vec{x}$.

Таким образом, для второго уравнения Колмогорова, помимо (9.45), имеем дополнительные условия

$$\lim_{\substack{|\vec{x}|\to\infty \\ t>t_0}} f(\vec{X}, t; \vec{x}, t_0) = 0, \tag{9.47}$$

$$\int f(\vec{X}, t; \vec{x}, t)\, dX = 1.$$

Для первого уравнения Колмогорова, кроме (9.46), дополнительные условия следующие:

$$\lim_{\substack{|\vec{x}|\to\infty \\ t_0<t}} f(\vec{X}, t; \vec{x}, t_0) = 0, \tag{9.48}$$

$$\int f(\vec{X}, t; \vec{x}, t_0)\, dx = 1.$$

Поскольку мы рассматриваем стационарный и статистически однородный процесс блужданий частицы, то, следовательно, вектор $\vec{a}$ и тензор b_{ij} являются постоянными. В соответствии с [7], такой марковский многомерный процесс является гауссовским процессом и потому, найдя плотность f, мы получим его исчерпывающее описание. Примем для простоты, что тензор b_{ij} приведен к главным осям, совпадающим с выбранной системой координат. В этом случае решение уравнений Колмогорова можно записать в виде

$$f(\vec{X}, t; \vec{x}, t_0) = \frac{1}{[2(t-t_0)\pi]^{n/2}\sqrt{\det b_{ij}}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(t-t_0)}\sum_{i=1}^{n}\frac{[X_i - x_i - a_i(t-t_0)]^2}{b_{ii}}\right\}. \tag{9.49}$$

Для получения (9.49) целесообразно ввести систему координат, движущуюся относительно первоначально выбранной системы со

скоростью $\vec{a}$, что позволяет устранить в уравнениях конвективные члены. Затем линейным преобразованием координат достигается изотропность членов со второй производной и выписывается стандартное решение уравнения типа теплопроводности. Поскольку уравнения Колмогорова являются сопряженными уравнениями с разнонаправленными временными осями, их решения эквивалентны.

Теперь можно вычислить и поле средней концентрации $u(x, t)$. Для этого достаточно подставить выражение для плотности f (9.49) в равенства (9.8) или (9.9). Пользоваться полученным решением нужно с известной осторожностью. Так, если в поле отсутствуют источники и изучается эволюция начального распределения $c_0(\vec{x}, t_0)$, решение (9.8) с плотностью (9.49) можно использовать при условии (9.44). При наличии источников, продуктивность которых зависит от времени, ограничения должны быть более сложными. Помимо (9.44) следует учесть то обстоятельство, что эффект действия источников на интервале времени, предшествующем моменту t и имеющем длину нескольких лагранжевых масштабов T, марковская модель передает искаженно. Если источники дискретны, определенные ограничения должны быть связаны не только с временами, но и расстояниями от точек, где определяются решения, до источников. Хотя общие критерии в этом случае дать затруднительно, можно полагать, что погрешность определения $u(X, t)$ будет мала, если $t-t_0 \gg T$ и при интегрировании по времени в формуле (9.9) вклад в интеграл интервала $t-t_1 \gg T$ будет мал по сравнению со всем интегралом.

Вернемся, однако, к рассмотрению плотности f, представленной в виде (9.49). Нетрудно узнать в ней функцию Грина уравнения (9.41), в котором коэффициент — вектор $\vec{a}$ и тензор b_{ij} постоянны. Другими словами, это поле средней концентрации мгновенного точечного источника единичной продуктивности, рассеянного полем случайной скорости.

Обратившись к формуле (9.9), легко проверить, что средняя концентрация $u(X, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u(X, t)}{\partial t} + a\nabla u(X, t) - \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}\frac{\partial^2 u(X, t)}{\partial X_i^2} = \varphi(\vec{X}, t). \qquad (9.50)$$

При этом функция $u(\vec{X}, t)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$u(\vec{X}, t)|_{t=t_0} = c_0(\vec{X}). \qquad (9.51)$$

Поскольку функции $c_0(\vec{X})$ и $\varphi(\vec{X}, t)$ произвольные, уравнение (9.50) — это дифференциальное уравнение для средней концентрации примеси, переносимой потоком, которому могут быть поставлены в соответствие вектор $\vec{a}$ и тензор b_{ij}. Естественно, область применимости уравнения (9.50) связана с приведенными ограничениями. Для завершения описания марковской модели переноса укажем связь

вектора $\vec{a}_i$ и тензора b_{ij} с характеристиками случайного поля скорости $v(\vec{r})$, вытекающими из формул (9.39), (9.40), (9.20), (9.30)

$$\vec{a} = <\vec{v}>, \tag{9.52}$$

$$b_{ij} = 2B_{ij}(0)\,T/m^2. \tag{9.53}$$

Здесь B_{ij} — компоненты корреляционного тензора поля скорости; T — лагранжев масштаб времени.

Тензор B_{ij} вычислен в главе 5, а для оценки T принимается зависимость

$$T = am/|<\vec{v}>|. \tag{9.54}$$

Пусть средняя скорость $<\vec{v}>$ направлена вдоль оси x_1. Тогда, подставив (9.54) в (9.53) и использовав результаты вычисления $B_{ij}(0)$ (см. главу 5), найдем тензор b_{ij} для трехмерной фильтрации

$$b = \frac{2\zeta^2 a\,|<\vec{v}>|}{15m}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.55}$$

Аналогично для двумерной фильтрации

$$b = \frac{\zeta^2 a\,|<\vec{v}>|}{4m}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.56}$$

Завершая на этом изложение марковской модели фильтрационной дисперсии, уместно проследить, в чем заключена ее близость и соответственно отличие от более ранней модели фильтрационной дисперсии на микроуровне, получившей в литературе наименование «конвективной диффузии» [23, 24].

Как уже подчеркивалось, в этой теории рассматривается дисперсионный механизм, порожденный нерегулярностью поля скоростей внутри пор, описать которое можно лишь привлекая уравнения Навье — Стокса и учитывая чрезвычайно сложную геометрию межпорового пространства, что практически немыслимо. Поэтому, рассматривая такие поля считают их случайными и являющимися результатом преобразования регулярного поля средней скорости при помощи некоторого случайного локального тензора. Принятие гипотезы об аналогии дисперсии в порах с броуновским движением, что эквивалентно предположению о том, что процесс переноса частиц — марковский, позволяет выписать соответствующее диффузионное уравнение с конвективным членом и связать его коэффициенты с моментными функциями блуждающих частиц, которые в свою очередь выражаются через компоненты локального тензора. Результатом такого рассмотрения являются уравнения конвективной диффузии, установление тензорного характера коэффициентов диффузии, зависящих от средней скорости и дисперсии компонент локального тензора. Поскольку

вторые моменты локального тензора можно вычислить лишь на основании информации о пульсациях скорости внутри пор, а она отсутствует, для определения коэффициентов диффузии используются результаты экспериментов по дисперсии. Таким образом, для замкнутого описания дисперсии на микроуровне необходима эмпирическая информация о протекании самого процесса дисперсии — «конвективной диффузии». Как видно из предыдущего изложения, теория марковской дисперсии на макроуровне использует вычисляемые при помощи статистического анализа фильтрационные характеристики поля скоростей однородной жидкости в неоднородной пористой среде.

ГЛАВА 10
СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Предшествующий анализ фильтрационной дисперсии до некоторой степени не учитывал того важного обстоятельства, что дисперсии подвержены макроскопические поля истинной концентрации примеси, флуктуирующие из-за нерегулярности поля скорости переноса. Это означает, что можно выписать динамические уравнения относительно истинной концентрации и фильтрационных характеристик — скорости фильтрации, давления и поставить задачу об осреднении всей замкнутой системы уравнений. Результатом этого будет установление связи между эффективными характеристиками фильтрационного переноса и полем средней концентрации. При этом становятся излишними предположения о возможности использования марковских моделей и т. п. Основная трудность такого способа анализа дисперсии связана с реализацией усреднения полной системы уравнений фильтрационного переноса.

Рассматривая перенос нейтральной примеси, процесс осреднения полной системы удается расщепить и собственно перенос можно изучать, считая поле случайных скоростей известным. Анализ одномерных задач в средах с постоянной неслучайной пористостью приводит в рамках второго порядка теории возмущений к интегро-дифференциальному уравнению для средней концентрации.

Учет флуктуаций пористости при изучении переноса полем случайной скорости фильтрации приводит к несколько более сложным моделям и вносит некоторые качественные отличия в механизм переноса.

Следует отметить, что усреднение уравнений переноса при определенных предположениях можно осуществить в рамках функционального описания. Последние результаты в этой области приведены в работе [13]. Частично они отражены в данной главе.

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА

Рассмотрим перенос динамически нейтральной примеси фильтрационным потоком в среде со случайными неоднородностями. Будем считать фильтрацию установившейся, жидкость несжимаемой и однородной по вязкости и плотности. В отсутствие источников жидкости, пренебрегая молекулярной диффузией и дисперсией в масштабе пор, систему уравнений можно представить в виде

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\vec{v}\nabla c=0, \tag{10.1}$$

$$\vec{v}=-\frac{k}{\mu}\nabla p, \quad \operatorname{div}\vec{v}=0. \tag{10.2}$$

Здесь v — вектор локальной скорости фильтрации; p — давление; k — проницаемость пористой среды; m — ее пористость; μ — вязкость жидкости; c — локальная концентрация примеси.

Поскольку примесь принята динамически нейтральной, задачу осреднения можно расщепить. Можно усреднить систему (10.2) и найти необходимые соотношения, не рассматривая динамики примеси,— примеры такого осреднения изложены в главах 5 и 6, где вычисляются эффективные проводимости, корреляции различных элементов поля и т. д. Независимо, в предположении, что поле $\vec{v}$ известно, можно поставить задачу осреднения уравнения (10.1).

Реализацию процедуры осреднения уравнения переноса (10.1) начнем с рассмотрения одномерной фильтрации. Случай одномерной фильтрации несколько специфичен, поскольку при постоянной пористости и отсутствии источников жидкости скорость фильтрации, однородная по пространственной координате, может рассматриваться только как случайная функция времени. Однако уже в этом простейшем варианте можно выявить основные трудности и особенности процесса осреднения уравнений. Методы, развитые при изучении одномерных течений, оказываются эффективными и для анализа многомерных полей в средах со случайными проницаемостью и пористостью.

Итак, рассмотрим уравнение одномерного переноса в области $t>0$, $|x|<\infty$

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+v\frac{\partial c}{\partial x}=0, \tag{10.3}$$

и пусть при $t=0$ зафиксировано начальное неслучайное распределение концентрации

$$c(x,\ 0)=c_0(x). \tag{10.4}$$

Поскольку $\operatorname{div} v=\partial v/\partial x=0$, имеем $v=v(t)$ и, следовательно, общее решение задачи (10.3), (10.4) имеет вид

$$c(x,\ t)=c_0\left[x-\frac{1}{m}\int_0^t v(\tau)\,d\tau\right]. \tag{10.5}$$

Располагая решением (10.5), естественно, можно вычислить $u = <c>$ и любые статистические моменты решения. Однако установить какому уравнению удовлетворяет средняя концентрация, таким образом, не удается. Действительно, пусть $\varphi = \varphi(v)$ — известная плотность распределения случайной скорости $v(t)$. Усреднив (10.5), запишем

$$u = <c> = \int c_0 \left[x - \frac{1}{m} \int_0^t v(\tau)\, d\tau \right] \varphi(v)\, dv \tag{10.6}$$

и тогда, выполнив в (10.6) интегрирование, найдем, что $u(x, t)$ есть некоторая неслучайная функция, зависящая от того, какова функция $c_0(x)$. Естественно, что такая функция может удовлетворять любому уравнению, если только оно неоднородно.

Итак, вернемся к уравнению (10.3) и, подставив в него следующие разложения:

$$c(x, t) = u(x, t) + c'(x, t), \quad u(x, t) = <c(x, t)>,$$
$$v(t) = W + v'(t), \quad W = <v(t)> = \text{const}, \tag{10.7}$$

усредним. Для $u(x, t)$ и $c'(x, t)$ получим систему

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x} = - <v' \frac{\partial c'}{\partial x}>, \tag{10.8}$$

$$m \frac{\partial c'}{\partial t} + W \frac{\partial c'}{\partial x} = -v' \frac{\partial u}{\partial x} + <v' \frac{\partial c'}{\partial x}> - v' \frac{\partial c'}{\partial x}, \tag{10.9}$$

$$u(x, 0) = c_0(x), \quad c'(x, 0) = 0. \tag{10.10}$$

Естественный путь получения уравнения для u заключается в следующем. Рассмотрим уравнение (10.9) при однородном начальном условии $c'(x, 0) = 0$ и, считая $\partial u/\partial x$ в правой части параметром задачи, найдем $c'(x,t)$, зависящее, конечно, от параметра. Подставив найденное c в правую часть уравнения (10.8) и усреднив ее, получим искомое соотношение для $u(x, t)$.

Введем функцию Грина G как удовлетворяющее однородному начальному условию решение уравнения

$$m \frac{\partial G}{\partial t} + W \frac{\partial G}{\partial x} = m\delta(x - x_1)\, \delta(t - t_1). \tag{10.11}$$

Нетрудно проверить, что

$$G(x, t, x_1, t_1) = \delta[x - x_1 - Wm^{-1}(t - t_1)]\, h(t - t_1). \tag{10.12}$$

Здесь $h(t - t_1)$ — символ единичной функции Хевисайда

$$h(t - t_1) = \begin{cases} 1, & t > t_1, \\ 0, & t < t_1. \end{cases} \tag{10.13}$$

Используя найденную функцию Грина, из (10.9) легко получить интегро-дифференциальное уравнение

$$c'(x, t) = -m \int_0^t \left[v'(t_1) \frac{\partial u(z, t_1)}{\partial z} - <v'(t_1) \frac{\partial c'(z, t_1)}{\partial z}> + \right.$$

$$+ v'(t_1)\frac{\partial c'(z, t_1)}{\partial z}\Big] dt_1, \qquad (10.14)$$

$$z = x - Wm^{-1}(t - t_1).$$

Для решения (10.14) используем метод итераций, в соответствии с которым, вычисляя c'_{n+1}, под знаком интеграла будем полагать $c' = c'_n$. Для начального приближения естественно принять $c_0 = 0$. Подставив c'_0 в правую часть (10.14), найдем

$$c'_1(x, t) = -m^{-1}\int_0^t v'(t_1)\frac{\partial u(z, t_1)}{\partial z} dt_1. \qquad (10.15)$$

Аналогично вычисляются c'_2, c'_3, ..., а затем и правая часть (10.8), которая таким образом превращается в бесконечный ряд интегро-дифференциальных операторов, действующих на среднюю концентрацию $u(x, t)$. Коэффициентами этих операторов являются разноточечные моменты случайной функции $v'(t)$.

Оставляя в стороне вопрос о сходимости метода итераций, тем более, что практически обычно реализуется лишь первое приближение, подчеркнем важную особенность уравнения для средней концентрации, а именно его нелокальность. В самом деле, рассмотрим снова уравнение (10.3) для истинной концентрации $c(x, t)$. Поскольку оно связывает $\partial c/\partial t$ и $\partial c/\partial x$, определенные в одной и той же точке пространства — времени, это соотношение локально. Процесс усреднения уравнений по ансамблю реализаций позволяет частицам примеси перемещаться не только в пространстве (x, t), но и как бы в пространстве реализаций. В этом заключена причина нарушения локальности и, как следствие, появление в уравнении для $u(x, t)$ интегро-дифференциальных операторов.

Рассмотрим подробно уравнение для $u(x, t)$, ограничившись первым приближением $c'(x, t)$, подставив которое в уравнение (10.8) и усреднив, получим

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x} = m^{-1}\int_0^t B(t, t_1)\frac{\partial^2 u(z, t_1)}{\partial z \partial x} dt_1, \qquad (10.16)$$

$$B(t, t_1) = \langle v'(t) v'(t_1)\rangle.$$

Итак, уже в первом приближении уравнение для средней концентрации нелокально, оно связывает производные, определенные в разных точках пространства — времени.

Рассмотрим внимательно правую часть уравнения (10.16). Нетрудно видеть, что интеграл в этом уравнении — это просуммированные с весом $B(t, t_1)$ значения $\partial^2 u/\partial x^2$ для некоторой точки, «плывущей» по оси x со скоростью W/m и оказавшейся в момент времени t в точке x. По сути это своеобразная лагранжева характеристика «плывущей» точки, проинтегрированная с весом B по траектории. Отсюда ясно, что степень нелокальности зависит от «памяти» про-

цесса $v'(t)$, характеристикой которой служит весовая функция $B(t, t_1)$ — автокорреляционная функция процесса.

Очевидно, в случае произвольной функции $B(t, t_1)$ локализовать уравнение не удается. Если процесс $v(t)$ стационарен, $B = B(|t - t_1|)$ и уравнение (10.16), дополненное начальными условиями, можно решить при помощи двойного преобразования Фурье по обеим координатам.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, когда уравнение для $u(x, t)$ можно локализовать. Интуитивно ясно, что это в первую очередь случай «короткой памяти» процесса $v(t)$. Пусть ε — масштаб корреляции процесса, определяемый равенством

$$\varepsilon = B^{-1}(0) \int_0^\infty B(\tau) d\tau, \tag{10.17}$$

и пусть $\varepsilon \ll t$. Тогда уравнение (10.16) естественным образом локализуется и является уравнением параболического типа

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon B(0)}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{10.18}$$

В самом деле, при условии, что $\varepsilon \ll t$, а $\partial^2 u(z, t_1)/\partial x^2$ ограничена, основной вклад в интеграл (10.16) вносит интервал $(t - k\varepsilon, t)$, где число k зависит от скорости убывания корреляционной функции $B(t - t_1)$. Например, если $B \sim \exp[-|t - t_1|/\varepsilon]$, то для k приемлема оценка $k < 10$. При этом интеграл по промежутку $(0, t - k\varepsilon)$ составит не более 10^{-3} от интеграла по всему промежутку $(0, t)$. Если же $B \sim \exp[-(t - t_1)^2/\varepsilon^2]$, то для этого достаточно взять $k \sim 2$.

Таким образом, для интеграла (10.16) имеем оценку $\int_0^t \approx \int_{t-k\varepsilon}^t$, и если в промежутке $(t - k\varepsilon, t)$ вторая производная меняется незначительно, то

$$\int_{t-k\varepsilon}^t B(t - t_1) \frac{\partial^2 u(z, t_1)}{\partial x^2} dt_1 \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \int_{t-\varepsilon k} B(t - t_1) dt_1 = \varepsilon B(0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

что по существу эквивалентно равенству

$$B(t - t_1) = \varepsilon B \delta(t - t_1),$$

т. е. замене B в рассматриваемом приближении с конечным, но малым временем корреляции ε некоторой дельта-коррелированной функцией. Локализацию, достигаемую в результате такой замены, назовем грубой локализацией.

Рассмотрим теперь случай $t \ll \varepsilon$. Тогда в (10.16) следует положить $B(\tau) = B(0)$ и

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B(0)}{m} \int_0^t \frac{\partial^2 u(z, t_1)}{\partial x^2} dt_1. \tag{10.19}$$

Продифференцируем уравнение (10.19) по x

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+W\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{B}{m}\int_0^t\frac{\partial^3 u(z,\ t_1)}{\partial x^3}dt_1. \tag{10.20}$$

Дифференцируя то же уравнение (10.19) по t, учтем что подынтегральная функция зависит от t, поскольку от t зависит z. Поэтому ее дифференцирование по t с точностью до множителя совпадает с результатом дифференцирования по x

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+W\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{B}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{W}{m^2}\int_0^t\frac{\partial^3 u(z,\ t_1)}{\partial x^3}dt_1. \tag{10.21}$$

Исключая из (10.20) и (10.21) интеграл, получим уравнение

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2W\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+(W^2-B)m^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{10.22}$$

Нетрудно убедиться, что при $B>0$ (10.22) будет уравнением гиперболического типа. При постановке для него задачи Коши следует задать помимо $u(x,\ 0)$ также $\partial u(x,\ 0)/\partial t$. Пусть, например, задано начальное распределение концентрации $c(x,\ 0)=f(x)$. Отнесем это условие и к средней концентрации, а для второго дополнительного условия используем усредненное уравнение переноса (10.16) при $t=0$. Естественно полагать, что решение возмущенного уравнения (10.22) при малых временах t должно быть близким к решению невозмущенного уравнения, т. е. уравнения (10.3), в котором $v=W$. Естественно также считать, что должны быть близки и их производные, в частности производные по времени. Для невозмущенного уравнения начальное значение $\partial u/\partial t$ не задается, его можно найти из уравнения невозмущенного переноса (10.16) при $t=0$

$$\partial u(x,\ 0)/\partial t=-Wm^{-1}\partial u(x,\ 0)/\partial x.$$

Таким образом, в качестве начальных условий в дальнейшем будут использоваться следующие соотношения:

$$u(x,\ 0)=f(x),\ \partial u(x,\ 0)/\partial t=-Wm^{-1}f'(x). \tag{10.23}$$

Решение уравнения (10.22) при условиях (10.23) имеет вид

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[f\left(x-\frac{W+\sqrt{B}}{m}t\right)+f\left(x-\frac{W-\sqrt{B}}{m}t\right)\right]. \tag{10.24}$$

Рассмотрим задачу об эволюции начального распределения — «полочки» $u(x,\ 0)=1-h(x)$. Тогда решение уравнения (10.22) имеет вид

$$u(x,\ t)=1-\frac{1}{2}h\left(x-\frac{W+\sqrt{B}}{m}t\right)-\frac{1}{2}h\left(x-\frac{W-\sqrt{B}}{m}t\right), \tag{10.25}$$

т. е. исходная «полочка» распадается на две «полочки» половинной высоты, движущиеся со скоростями на $\sqrt{B}/m$ больше и соответственно меньше, чем средняя скорость W/m. Два скачка вместо одного,

порождаемого невозмущенным потоком, конечно, относительно грубо аппроксимируют профиль концентрации для произвольной плотности распределения случайной скорости v, которая при больших t является случайным параметром, не зависящим от времени $t \ll \varepsilon$, т. е. является случайной величиной. Для передачи специфических особенностей волны $u(x, t)$ следует учесть более высокие члены ряда возмущений. Правда, получить локальное уравнение в этом случае не удается.

Рассмотрение дисперсии от мгновенного точечного источника, выделившего в начальный момент в поток некоторое количество примеси q, приводит к начальному условию $f(x) = q\delta(x)$. Эволюция этого распределения в соответствии с общим решением сводится к разделению порции q на две равные части, «плывущие» со скоростями $(W + \sqrt{B})/m$ и $(W - \sqrt{B})/m$.

Если $B = 0$, то уравнение (10.22) параболического типа. Оно не содержит первых производных и поэтому заменой переменных его можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению $dx/dt = W/m$, эквивалентному исходному невозмущенному уравнению в частных производных.

Отметим, что случай $\varepsilon \ll t$ можно истолковать так же, как распространение примеси в слоистой системе, скорости в которой распределены случайно и не зависят от времени. Случай этот достаточно интересен в прикладном отношении, поскольку соответствует широко распространенным на практике неоднородным системам.

Рассмотрим еще один случай, когда уравнение (10.16) можно локализовать. Пусть корреляционная функция процесса имеет вид

$$B(t - t_1) = B \exp\left(-\frac{|t - t_1|}{\varepsilon}\right).$$

Продифференцировав уравнение (10.16) по x, получим

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + W\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{m}\int_0^t B(t - t_1)\frac{\partial^3 u(z, t_1)}{\partial x^3}\,dt_1. \qquad (10.26)$$

Дифференцируя (10.16) по t с учетом принятого в (10.25) $B(t - t_1)$, запишем

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + W\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{B}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{m\varepsilon}\int_0^t B(t - t_1)\frac{\partial^2 u(z, t_1)}{\partial x^2}\,dt_1 -$$

$$- \frac{W}{m^2}\int_0^t B(t - t_1)\frac{\partial^3 u(z, t_1)}{\partial x^3}\,dt_1. \qquad (10.27)$$

Исключив из (10.26) и (10.27) при помощи (10.16) интегралы, получим локализованное уравнение второго порядка.

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\left[m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2W\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{(W^2 - B)}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0. \qquad (10.28)$$

Очевидно, при $\varepsilon \gg T$ из (10.28) сразу следует уравнение (10.22). Случай малых $\varepsilon \ll t$ сложнее, и мы рассмотрим его после приведения уравнения (10.28) к каноническому виду. Дифференциальная форма в квадратных скобках из (10.28) уже рассматривалась и было установлено, что она гиперболическая. Поэтому уравнение (10.28) относится к гиперболическому типу. Введем новые независимые переменные

$$\zeta = t, \quad \eta = x - Wt/m \tag{10.29}$$

и, преобразовав к ним уравнение (10.28), запишем

$$m \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\varepsilon B}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \varepsilon m \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}. \tag{10.30}$$

Уравнение (10.30) целесообразно представить в иной форме, заменив попутно ζ на t

$$\frac{m}{\varkappa^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \tag{10.31}$$

где

$$\varkappa = B\varepsilon/m, \quad c^2 = B/m^2.$$

Уравнение (10.31) называется телеграфным, параметр $c = \sqrt{B}/m$ определяет скорость распространения возмущений относительно подвижной системы координат, параметр $\varkappa^2$ характеризует диссипацию, дисперсию возмущений. Естественно назвать $\varkappa^2$ коэффициентом дисперсии, а c — скоростью дисперсии.

Отметим важную особенность локализованного уравнения дисперсии. В отличие от уравнения дисперсии (9.50), полученного на базе марковской гипотезы о блуждании частиц, это уравнение содержит волновой член $c^2 \partial^2 u/\partial t^2$, предопределяющий конечную скорость распространения возмущений. Эта скорость не что иное, как средняя квадратическая скорость жидких частиц.

Следует отметить, что аналогичные уравнения известны в теории молекулярной диффузии (броуновского движения), учитывающей инерцию частиц, в теории турбулентной диффузии с конечной скоростью [21]. Телеграфное уравнение для диспергируемой фильтрационным потоком примеси получено в работе [50] в предположении конечности времени корреляции скорости блуждания жидкой частицы. Для получения таких уравнений принимается гипотеза, что марковской является вектор-функция $\{X(\vec{x}, t), v(\vec{x}, t)\}$ и для вводимых в рассмотрение плотностей вероятности выписывается система уравнений Колмогорова, которая при некоторых упрощениях сводится к телеграфному уравнению. В работе [21] приведено подробное обоснование этой процедуры и дан анализ некоторых частных случаев турбулентной диффузии с конечной скоростью. Уместно отметить, что если при таком подходе для получения физически естественного эффекта конечности скорости возмущений необходимо специальное конструирование марковского процесса, непосредственное усреднение уравнения переноса

автоматически приводит к телеграфному уравнению. Кроме того, как будет ясно из дальнейшего, на этом пути нет трудностей с определением коэффициентов усредненных уравнений переноса. В то же время при использовании марковских процессов, отсутствие лагранжевых корреляционных функций скорости вынуждает при определении коэффициентов уравнений принимать гипотезы о величинах лагранжевого временного масштаба.

Вернемся вновь к задаче Коши для уравнения (10.31), рассмотренной раньше для случая $\varepsilon \gg t$. Начальные условия в подвижной системе координат имеют тот же вид

$$u(\eta, 0) = f(\eta), \quad \partial u(\eta, 0)/\partial t = 0.$$

При таких условиях решение уравнения (10.31) можно представить следующим образом:

$$u(\eta, t) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{mc^2t}{2\varkappa^2}\right)\left\{f(\eta - ct) + f(\eta + ct) + \frac{mc}{2\varkappa^2}\int_{-ct}^{ct}\left[I_0\left(\frac{mc}{2\varkappa^2}\sqrt{c^2t^2 - \lambda^2}\right) + \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - \lambda^2}} I_1\left(\frac{mc}{2\varkappa^2}\sqrt{c^2t^2 - \lambda^2}\right)\right] f(\lambda + x)\,d\lambda\right\}, \tag{10.32}$$

где $I_0(y)$, $I_1(y)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

Рассмотрим эволюцию примеси, введенной в точке $x = 0$ при помощи мгновенного точечного источника. В этом случае $f(x) = q\delta(x)$ и из (10.32) следует, что при $|\eta| \leqslant ct$

$$u(\eta, t) = \frac{q}{2}\exp\left(-\frac{mc^2t}{2\varkappa^2}\right)\left\{\delta(\eta - ct) + \delta(\eta + ct) + \frac{mc}{2\varkappa^2}\left[I_0\left(\frac{mc}{2\varkappa^2}\sqrt{c^2t^2 - \eta^2}\right) + \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - \eta^2}} I_1\left(\frac{mc}{2\varkappa^2}\sqrt{c^2t^2 - \eta^2}\right)\right]\right\}. \tag{10.33}$$

Если же $|\eta| > ct$, концентрация $u(\eta, t) = 0$.

Эта задача в терминах теории турбулентной диффузии с конечной скоростью рассмотрена и проанализирована в работе [21]. Приведем некоторые результаты этого анализа.

Решение (10.33) показывает, что порция примеси, поступившая в начальный момент $t = 0$ в точке $x = 0$, далее диспергируется, оставаясь всегда в зоне $\left[\left(\frac{W}{m} - c\right)t, \left(\frac{W}{m} + c\right)t\right]$. На границах зоны — подвижных фронтах сосредоточено конечное количество примеси. Как видно из (10.33), на каждом фронте это количество равно $(q/2) \times \exp(-mc^2t/2\varkappa^2)$. Подстановка значений $\varkappa$ и c из (10.31) дает для фронтовых порций примеси значение $(q/2)\exp(-t/2\varepsilon)$ и, следовательно, при $t \gg \varepsilon$ концентрация на фронтах мала.

Для оценки концентрации между фронтами, но вдали от них, положим в (10.33) $|\eta| \ll ct$ и разложим аргументы функций Бесселя

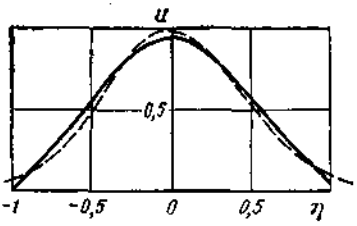


Рис. 68. График непрерывной части функции распределения концентрации от мгновенного точечного источника примеси при $t = 4\varepsilon$

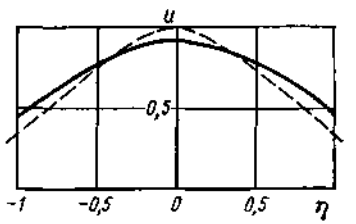


Рис. 69. График непрерывной части функции распределения концентрации от мгновенного точечного источника примеси при $t = 10\varepsilon$

в ряд по η. Считая, как и ранее, $t \gg \varepsilon$ и используя асимптотические представления функций Бесселя, получим для $|\eta| \ll ct$ и $t \gg \varepsilon$

$$u(\eta, t) = \frac{q\sqrt{m}}{2\varkappa\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{m\eta^2}{4\varkappa^2 t}\right), \qquad (10.34)$$

т. е. решение уравнения (10.31) при условии $c \to \infty$, что означает слабое влияние конечности скорости дисперсии на изменение концентрации вдали от фронтов при условии, что время корреляции мало́ по сравнению с t. Наглядное представление о влиянии конечности скорости дисперсии на распределение концентрации можно получить по рис. 68, 69, заимствованным из работы [21]. На этих рисунках пунктиром нанесены кривые, соответствующие (10.34), т. е. решению параболического уравнения переноса.

Это сопоставление показывает, что гиперболическое уравнение для средней концентрации целесообразно использовать для исследования процесса либо для малых времен t, либо в тех случаях, когда важно знать концентрацию в окрестности фронта. В остальных случаях приемлемо параболическое уравнение переноса.

Теперь становится понятным, почему при непосредственной локализации интегро-дифференциального уравнения (10.16) было получено уравнение (10.18) — параболическое, а не гиперболическое. Действительно, условие $\varepsilon \ll t$, при котором была осуществлена локализация, как раз и определяет несущественность волнового члена в уравнении переноса, достаточную точность параболического уравнения для средней концентрации.

Полученные результаты позволяют с несколько иной точки зрения оценить метод моделирования переноса при помощи марковских процессов, приводящий к параболическому уравнению переноса. Если для обоснования такого моделирования приходилось привлекать в достаточной мере интуитивные соображения о допустимости замены непрерывного процесса специальной цепью Маркова, то при непосредственном усреднении уравнений переноса мы получили параболическое уравнение и условия его применимости, а также более общее уравнение гиперболического типа. Следует учитывать, что гиперболическое уравнение позволяет изучать такие процессы, для которых параболическое уравнение

может оказаться недостаточно точным. Для примера можно указать случай, когда поле концентрации порождено источником, интенсивность которого переменна, или когда рассматривается задача Коши с достаточно нерегулярным начальным распределением.

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО ПЕРЕНОСА

Рассмотрим перенос примеси потоком в пространстве произвольного числа измерений. Будем считать поток квазиодномерным, полагая среднюю скорость зависящей от одной координаты, а флуктуации зависящими от всех координат. Будем также считать движение жидкости установившимся. Это обстоятельство, отсутствующее, например, в процессе турбулентной диффузии, придает неодномерной фильтрационной дисперсии специфические черты и требует специального анализа.

Пусть для примеси справедливо локальное уравнение сохранения

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}c) = 0. \tag{10.35}$$

Будем считать пористость m постоянной и усредним уравнение (10.35)

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W}\nabla u = -\operatorname{div} <\vec{v}'c'>. \tag{10.36}$$

Вычитая из (10.35) уравнение (10.36) и сохраняя главные члены, получим уравнение для $c'(x, z)$

$$m\frac{\partial c'}{\partial t} + \vec{W}\nabla c' = -\operatorname{div}(\vec{v}'u). \tag{10.37}$$

Дополнительные детерминированные условия, наложенные на c, отнесем к u и тогда соответствующие условия для c' будут однородными. Если, например, задано условие $c(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$, то для c' имеем $c'(\vec{x}, 0) = 0$. При этом условии решение (10.37) имеет вид

$$c'(\vec{x}, t) = -m^{-1}\int_0^t \operatorname{div}_z(\vec{v}'u)dt_1, \quad \vec{z} = \vec{x} - \vec{W}m^{-1}(t - t_1). \tag{10.38}$$

Здесь символ div_z указывает на то, что дифференцирование проводится по z. При этом вследствие (10.38) можно записать

$$\partial/\partial z_i = \partial/\partial x_i = -mW_i^{-1}\partial/\partial t. \tag{10.39}$$

Подставив (10.38) в (10.37), получим уравнение для средней концентрации $u(\vec{x}, t)$

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W}\nabla u = \frac{1}{m}\int_0^t \operatorname{div}_z\vec{N}dt_1 \tag{10.40}$$

$$\vec{N} = <\vec{v}'\operatorname{div}_z(\vec{v}'u)>.$$

Рассмотрим компоненту вектора $\vec{N}$

$$N_j = \left\langle v_j' \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} (v_i' u) \right\rangle = \left\langle v_j' \left(\sum_i v_i' \frac{\partial u}{\partial z_i} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + u \sum_i \frac{\partial v_i'}{\partial z_i} \right) \right\rangle = \sum_i \left(B^{ji} \frac{\partial u}{\partial z_i} + u \frac{\partial B^{ji}}{\partial z_i} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left(B^{ji} u \right). \quad (10.41)$$

Здесь $B^{ji}(\vec{x}, \vec{z})$ — корреляционный тензор поля скоростей в среде со случайными неоднородностями

$$B^{ji}(\vec{x}, \vec{z}) = \langle v_j'(\vec{x})\ v_i'(\vec{z}) \rangle . \quad (10.42)$$

Подставив (10.41) в (10.40) с учетом (10.39), получим

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W} \nabla u = \frac{1}{m} \int_0^t \sum_{i,\ j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (B^{ji} u)\, dt_1 \quad (10.43)$$

Уравнение (10.43) можно переписать в виде

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W} \nabla u = \frac{1}{m} \int_0^t \sum_{i,j} \left(B^{ji} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial B^{ji}}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial B^{ji}}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 B^{ji}}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt_1 . \quad (10.44)$$

Если поле скоростей несжимаемой жидкости не содержит источников

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_i \partial v_i / \partial x_i = 0 ,$$

то усреднив последнее равенство, легко убедиться, что и флуктуации скорости удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{div} \vec{v}' = \sum_i \partial v_i' / \partial x_i = 0 ,$$

умножив которое на $v_i'(z)$ и усреднив результат, получим

$$\sum_i \frac{\partial B^{ji}}{\partial x_i} = 0 .$$

Совершенно аналогично имеем

$$\sum_i \frac{\partial B^{ji}}{\partial x_i} = 0$$

и, следовательно, уравнение (10.44) упрощается

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W} \nabla u = \frac{1}{m} \int_0^t \sum_{ij} B^{ji}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\partial^2 u(z, t_1)}{\partial x_i \partial x_j} dt_1 . \quad (10.45)$$

Если учесть, что для однородных полей корреляционный тензор B^{ii} зависит от $\vec{x}-\vec{z}=\frac{\vec{W}}{m}(t-t_1)$, то нетрудно заметить, что уравнение (10.44) для средней концентрации примеси, переносимой и диспергируемой установившимся потоком в многомерной неоднородной среде, имеет тот же вид, что уравнение (10.16) для одномерного течения, скорость которого является случайной функцией времени.

Не ограничивая общности, проведем дополнительные упрощения уравнения (10.45). Пусть ось x_1 параллельна вектору $\vec{W}$, тогда при любой ориентировке осей x_2 и x_3 тензор B^{ii} приведен к главным осям, и можно (10.45) переписать в виде

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{m}\int_0^t\sum_i B^{ii}(t-t_1)\,\frac{\partial^2 u(z,\,t_1)}{\partial x_i^2}\,dt_1\,. \qquad (10.46)$$

Введем в рассмотрение l_i — пространственные масштабы корреляции компонент скорости для точек $\vec{x}$ и $\vec{z}$, лежащих на прямых, параллельных вектору $\vec{W}$

$$l_i=\frac{1}{B^{ii}}\int_0^\infty B^{ii}(y)\,dy\,. \qquad (10.47)$$

Как показывает анализ, приведенный в главе 5, эти масштабы различны, причем

$$l_2=l_3<l_1.$$

Для примера, рассмотренного в главе 5 можно считать, что $l_2=l_3=l_1/\sqrt{3}$. Очевидно, поскольку B^{ii} в рассматриваемом случае зависит от $(t-t_1)$, можно ввести и временные масштабы

$$\varepsilon_i=ml_i/W\,. \qquad (10.48)$$

Эти масштабы имеют такой смысл: точка, плывущая со средней скоростью W/m, за время ε_i покрывает расстояние, для которого разноточечная корреляция компоненты v_i несущественна.

Рассмотрим некоторые случаи, когда уравнение (10.46) можно локализовать непосредственно. Пусть $\varepsilon_i<<t$. Тогда, как и в случае одномерного течения, из (10.46) следует

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{m}\sum\varepsilon_i B^{ii}(0)\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x_i^2}. \qquad (10.49)$$

Случай $\varepsilon\gg t$ также локализуется подобно одномерному и приводит к уравнению, обобщающему соотношение (10.22)

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2W\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial t}+\frac{W^2}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=\frac{1}{m}\sum_i B^{ii}(0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \qquad (10.50)$$

Рассмотрим теперь случай, когда корреляционный тензор B^{ij} можно представить в виде

$$B^{ii}(t-t_1) = B^{ii}(0)\exp|-(t-t_1)/\varepsilon_i|,$$

$$B^{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \tag{10.51}$$

где, как подчеркивалось, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$. Заметим, что неравенство масштабов ε_1 порождает определенные трудности при локализации и в конечном счете повышает порядок локализованного уравнения.

Как и ранее продифференцируем уравнение (10.46) по времени t и учтем зависимость (10.51). Тогда можно записать

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\int_0^t B^{11}\frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial x_1^2}dt_1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\int_0^t\left[B^{22}\frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + B^{33}\frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial x_3^2}\right]dt_1 = L_2(u), \tag{10.52}$$

где дифференциальная форма $L_2(u)$, имеет вид

$$L_2(u) = \sum_i B^{ii}(0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - m^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2mW\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} - W^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}. \tag{10.53}$$

Исходное уравнение (10.46) запишем в форме

$$\int_0^t B^{11}\frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial x_1^2}dt_1 + \int_0^t\left[B^{22}\frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + B^{33}\frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial x_3^2}\right]dt_1 = L_1(u), \tag{10.54}$$

$$L_1(u) = m\left(m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x_1}\right). \tag{10.55}$$

Равенства (10.52) и (10.54) рассмотрим как уравнения относительно интегралов, стоящих в левой части. Решив эту систему, найдем интеграл

$$\int_0^t B\frac{\partial^2 u(z,t_1)}{\partial x_1^2}dt_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}(\varepsilon_2 L_2 - L_1). \tag{10.56}$$

Нетрудно убедиться, что соотношение (10.56) отличается от нелокального уравнения одномерного течения (10.16) лишь порядком дифференциальной формы, стоящей в правой части. Попутно отметим, что уравнение (10.16) следует из (10.56) в предельном случае $\varepsilon_2 \ll \ll \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \ll t$. Если принять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, то из (10.56) вытекает локализованное уравнение второго порядка

$$\varepsilon L_2 - L_1 = 0, \tag{10.57}$$

или

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x_1} = \varepsilon\left[\frac{1}{m}\sum_i B^{ii}(0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2W\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} - \frac{W^2}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right].$$

Для локализации (10.56) в общем случае, как и для одномерного течения, следует уравнение (10.56) продифференцировать по t, его же продифференцировать по x_1, и из полученных двух равенств исключить интеграл. В итоге получим

$$L_3(u) - \varepsilon_1\left[\frac{W}{m}\frac{\partial L_3(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial L_3(u)}{\partial t}\right] + B^{11}(0)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \quad (10.58)$$

$$L_3(u) = L_1(u) - \varepsilon_2 L_2(u).$$

Как легко видеть, это уравнение третьего порядка и по времени и по пространственной переменной x_1. Значительные трудности при постановке и решении задач для подобных уравнений требуют определенной осторожности при окончательной формулировке проблемы. Нам кажется, что различие в параметрах ε_i, по крайней мере для изотропных сред, не настолько велико, чтобы оправдать существенное усложнение уравнения для средней концентрации. Не следует забывать, что и нелокализованное уравнение (10.46), следствием которого является уравнение (10.58), также приближенное, поскольку получено методом возмущений. Поэтому далее при рассмотрении многомерной дисперсии мы будем использовать локализованное уравнение второго порядка (10.57). Как легко убедиться, это уравнение гиперболического типа, от уравнения для одномерного течения (10.28) оно отличается лишь членом $\sum_{i\neq 1} B^{ii}(0)\,\partial^2 u/\partial x_i^2$, и выводы относительно решения (10.28) практически полностью переносятся и на уравнение (10.57). Как и в случае одномерного течения, возмущение распространяется с конечной скоростью. Действительно, введем новые независимые пространственные переменные

$$\eta_i = (x_i - W_i t/m)(B/B^{ii})^{1/2}, \quad (10.59)$$

где B — некоторая норма тензора B^{ij}, например $B = \frac{1}{3}\sum_i B^{ii}(0)$.

Тогда уравнение (10.57) примет вид

$$\frac{m}{\varkappa^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u. \quad (10.60)$$

Здесь

$$\varkappa^2 = B\varepsilon/m, \quad c^2 = B/m^2.$$

Очевидно, в системе координат η, начало которой «плывет» со скоростью W вдоль оси x_1, а масштабы по осям деформированы в соответствии с (10.59), возмущение распространяется со скоростью $c = \sqrt{B}/m$. В плывущей, но недеформированной системе скорость распространения возмущений вдоль осей различна, фронтовая поверхность — вытянутый вдоль первой оси эллипсоид вращения. Можно показать, что внутри эллипсоида вдали от его границы решение уравнения (10.60) стремится к решению параболического уравнения, которое получится из (10.60), если отбросить

вторую производную по времени. Как и в случае одномерного течения, решение на фронте — скачок экспоненциально убывает со временем. Таким образом, ситуация качественно подобна рассмотренному ранее одномерному случаю и, следовательно, при не слишком разнящихся $\varepsilon_i \ll t$ приведенный анализ обосновывает допустимость параболического приближения, т. е. уравнения (10.49).

Если масштабы неоднородности макроанизотропной среды существенно различаются, временные масштабы ε_i также будут существенно разными. Можно, однако, высказать правдоподобную гипотезу, что при $\varepsilon_i \ll t$ и в этом случае параболическое уравнение (10.49) остается достаточно хорошим приближением. Пусть, например, $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, т. е. по существу рассматривается одномерное распространение примеси. Легко видеть, что в случае, если $\varepsilon_1 \ll t$, из (10.49) следует одномерное параболическое уравнение (10.18), обоснование которого дано ранее. Таким образом, и в этом предельном случае крайне различающихся временных масштабов ε параболическое приближение вполне допустимо.

Приведенный анализ возможностей локализации касался случая, когда поле скоростей не имело источников и было однородно. Рассмотрим теперь общее уравнение переноса (10.43). Если, как и раньше, считать, что вектор скорости $\vec{W}$ направлен вдоль оси x_1, а оси x для любого $\vec{x}$ — главные оси тензора $B^{ii} \| (\vec{x}, \vec{x})$ и, кроме того, времена корреляции $\varepsilon_i = \varepsilon_i (\vec{x}) \ll t$, из (10.43) получим уравнение

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{m} \sum_i \varepsilon_i (\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [B^{ii} (\vec{x}, \vec{x}) u]. \qquad (10.61)$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon_i (\vec{x}) = \text{const}$ и $B^{ii} (\vec{x}, \vec{x}) = \text{const}$ уравнение (10.61) переходит в уравнение (10.49), полученное ранее для однородного поля скоростей без источников. В общем же случае, продифференцировав дважды $[B^{ii} u]$ в (10.61) с учетом того, что

$$\frac{\partial B^{ii} (\vec{x}, \vec{x})}{\partial x_2} = \frac{\partial B^{ii} (\vec{x}, \vec{x})}{\partial x_3},$$

получим

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon_1 (\vec{x})}{m} \left[\frac{\partial^2 B^{11}}{\partial x_1^2} u + 2 \frac{\partial B^{11}}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + \\ + \frac{1}{m} \sum_i \varepsilon_i B^{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \qquad (10.62)$$

Таким образом, в локализованном варианте уравнения переноса помимо обычных диффузионных членов получены конвективные и истокообразные члены, т. е. имеют место эффекты, аналогичные явлению направленного переноса при неоднородной турбулентности [21].

ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПЕРЕНОС И ДИСПЕРСИЯ ПОТОКА В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

Нерегулярность строения пористых структур порождает флуктуации любых статических и динамических характеристик системы пористая среда — жидкость. Принято считать, что главное значение при переносе имеют флуктуации параметров, характеризующих проводимость системы, поскольку обычно эти флуктуации достаточно велики. Флуктуациями емкостных характеристик — пористости, просветности обычно пренебрегают, тем более, что эти параметры непосредственно не входят в уравнения фильтрации однородной несжимаемой жидкости. Однако, такой подход, естественно, не универсален. Например, при изучении фильтрационной дисперсии пористость входит в уравнения переноса и, следовательно, если ее флуктуации значимы, необходим их учет, который в рамках уравнений для средней концентрации должен привести к появлению некоторых новых эффективных характеристик.

Рассмотрим простейшую модельную задачу, проясняющую специфику фильтрации в средах со случайной пористостью. Пусть в одномерной системе, ориентированной вдоль оси x, пористость $m=m(x)$ является случайной функцией координаты x. Через границу системы $x=0$ в начальный момент $t=0$ начинает поступать жидкость с постоянной и неслучайной скоростью фильтрации v. Будем считать вытеснение поршневым и интересоваться положением границы раздела в зависимости от времени. Очевидно, для этого следует решить задачу

$$dx/dt = v/m(x), \quad x(0) = 0. \tag{10.63}$$

Поскольку функция $m(x)$ случайная, различным реализациям нашей системы будут соответствовать различные положения границы $x=x(t)$. Введем $y(t)=\langle x(t)\rangle$ и получим для него уравнение, осреднив по ансамблю (10.63). Тогда

$$dy/dt = v\langle m^{-1}(x)\rangle, \quad y(0) = 0. \tag{10.64}$$

При этом следует учесть, что непосредственное усреднение в (10.63) затруднительно, поскольку в общем случае правая часть не является обычной случайной функцией, так как в различных реализациях определена в разных точках пространства — координатах фронтов.

Запишем для любой реализации нашей системы очевидный интеграл уравнения (10.63)

$$\int_0^x m(u)\,du = vt$$

и введем случайную характеристику $\overline{m}$ — эквивалентную пористость области, где прошел фронт

$$\overline{m} = \frac{1}{x}\int_0^x m(u)\,du.$$

Тогда

$$x = vt/\overline{m}.$$

Теперь введем m^* — эффективную пористость системы при помощи естественных соотношений

$$y = \langle x \rangle = \langle vt/m \rangle = vt/m^*.$$

Отсюда имеем

$$m^* = \left\langle \left[\frac{1}{x} \int_0^x m(u)\,du \right]^{-1} \right\rangle^{-1}, \tag{10.65}$$

т. е. эффективная пористость является функционалом от случайной пористости по области, где прошел фронт. Поскольку в (10.64) параметр x случаен и неизвестен, выразить m^* через y, t не удается. Как и в других подобных задачах, возникает проблема замыкания, решить которую можно либо приближенно, либо рассматривая специальные частные случаи.

Нетрудно установить, что эффективная пористость заключена в «вилке»

$$\langle m^{-1} \rangle^{-1} \leqslant m^* \leqslant \langle m \rangle,$$

границы которой реально достижимы.

Так, например, для x, малых по сравнению с масштабом корреляции пористости или, что тоже самое, для достаточно малого времени t, из (10.65) имеем

$$m^* = \langle m^{-1} \rangle^{-1}.$$

Очевидно, этот же результат следует и в случае, когда пористость m — случайная величина или, что тоже самое, рассматривается слоистая система, составленная из однородных слоев, вдоль которых происходит движение.

Если пористость — эргодическая случайная функция и, следовательно, усреднение по ансамблю и пространству эквивалентны, для достаточно больших x или больших значений времени имеем

$$m^* = \langle m \rangle.$$

В любых других случаях эффективная пористость находится внутри «вилки» и характеризует конкретное состояние системы пористая среда — распределение фронтов.

Рассмотрим подробнее случай, когда пористость не зависит от координаты x. Тогда

$$\frac{du}{dt} = v/m^*, \quad y(0) = 0, \quad m^* = \langle m^{-1} \rangle^{-1}. \tag{10.66}$$

Таким образом, уравнение для средней координаты фронта вытеснения имеет тот же вид, что и (10.63), но вместо локальной характеристики m здесь фигурирует эффективная пористость m^*. Очевидно, $m^* \leqslant m_0 = \langle m \rangle$ и, следовательно, использование средней пористости для подсчета средней скорости перемещения границы раздела даст заведомо заниженный результат.

Интегрируя (10.66), получим $y = vt/m^*$, т. е. средний фронт движется «ускоренно», но в эффективной среде сниженной пористо-

сти. При этом для среднего фронта условие материального баланса $ym^* = vt$ выполнено точно.

Рассмотрим теперь задачу (10.63) при условии, что скорость фильтрации $v = v(t)$ — случайная функция времени, некоррелированная с пористостью $m(x)$. Легко видеть, что все выводы, сделанные ранее, сохраняются при условии, что в формуле (10.66) необходимо заменить v на $<v>$.

Перейдем к изучению одномерного переноса динамически нейтральной примеси в среде со случайной пористостью. Очевидно, рассмотрение этой задачи позволит с несколько иной, более общей точки зрения проанализировать и только что рассмотренную задачу о движении границы раздела — поршня. Для этого достаточно положение границы — поршня определить при помощи функции $y(x, t)$, которая равна единице в тех точках оси x, которые лежат левее границы, и нулю — в точках, которые лежат правее поршня. Трактуя эту функцию $y(x, t)$ как концентрацию некоторой примеси и изучая ее перенос в среде со случайной пористостью, среднее значение $<y(x, t)>$ можно интерпретировать как функцию распределения вероятности того, что поршень в момент времени t находится правее точки x. Располагая функцией распределения $<y>$, можно дать полное описание движения поршня.

Итак, рассмотрим одномерный перенос примеси в среде со случайной пористостью $m(x)$, считая для простоты скорость фильтрации неслучайной и постоянной. Для концентрации примеси имеем уравнение сохранения

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \tag{10.67}$$

Представив случайные функции $m(x)$ и $c(x, t)$ в виде

$$m = m_0 + m', \quad m_0 = <m>, \quad c = u + c', \quad u = <c> \tag{10.68}$$

и усреднив (10.67), получим

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = - <m' \frac{\partial c'}{\partial t}>. \tag{10.69}$$

Вычитая из (10.67) уравнение (10.69) и сохраняя главные члены, запишем уравнение для $c'(x, t)$

$$m_0 \frac{\partial c'}{\partial t} + v \frac{\partial c'}{\partial x} = -m' \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{10.70}$$

Дополнительные детерминированные условия, наложенные на $c(x, t)$ отнесем к $u(x, t)$. Тогда соответствующие условия для $c'(x, t)$ будут однородными и, использовав функцию Грина (10.12), можно записать решение уравнения (10. 70)

$$c'(x, t) = -\frac{1}{m_0} \int_0^t m'(z) \frac{\partial u(z, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$z = x - vm_0^{-1}(t - \tau). \tag{10.71}$$

Для избежания недоразумений следует далее иметь в виду, что несмотря на то, что z зависит от τ, символ $\partial u(z, \tau)/\partial\tau$ означает частную производную только по второму аргументу τ. Подставив (10.71) в (10.69) и усреднив правую часть, получим нелокальное уравнение для средней концентрации

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{m_0}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t M(x,\ z)\frac{\partial u(z,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \qquad (10.72)$$

$$M(x,\ z) = <m'(x)\, m'(z)>.$$

Если случайная функция $m(x)$ статистически однородна, корреляционный момент M зависит от $vm_0^{-1}(t-\tau)$. Пусть эта зависимость имеет вид

$$M(x,\ z) = M_0 \exp[(\tau - t)/\varepsilon]. \qquad (10.73)$$

В этом случае уравнение локализуется. Процедура локализации несколько отличается от применявшейся ранее и потому есть смысл привести ее.

Дифференцируя интеграл в правой части (10.72) по параметру t, запишем

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M_0}{m_0}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{m_0}\int_0^t \frac{\partial M}{\partial t}\frac{\partial u(z,\tau)}{\partial\tau}d\tau +$$

$$+ \frac{1}{m_0}\int_0^t M(x,\ z)\frac{\partial^2 u(z,\tau)}{\partial\tau\partial t}d\tau. \qquad (10.74)$$

Продифференцировав последнее уравнение по t и учитывая, что

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}M,\quad \frac{\partial u(z,\tau)}{\partial t} = -\frac{v}{m_0}\frac{\partial u(z,\tau)}{\partial x},$$

получим

$$\left(m_0 - \frac{M}{m_0}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = -\frac{1}{m_0\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t M(x,\ z)\frac{\partial u(z,\tau)}{\partial\tau}d\tau -$$

$$-\frac{v}{m_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t M(x,\ z)\frac{\partial^2 u(z,\tau)}{\partial x,\ \partial t}d\tau. \qquad (10.75)$$

Первый член в правой части (10.75) исключается при помощи исходного уравнения (10.72), для исключения второго следует (10.72) продифференцировать по x. В итоге имеем локализованное дифференциальное уравнение второго порядка

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\left[m_0\left(1 - \frac{M_0}{m_0^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{v^2}{m_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0. \qquad (10.76)$$

Легко подсчитать его дискриминант

$$D = v^2 M_0/m_0^2.$$

Следовательно, уравнение (10.76) — гиперболического типа. Нетрудно заметить, что оно отличается от уравнения (10.28) — локализованного уравнения переноса в поле случайной скорости и постоянной пористости. Если в (10.76) возмущенным оказывается коэффициент при $\partial^2 u/\partial t^2$, то в (10.28) возмущению подвергается коэффициент при $\partial^2 u/\partial x^2$. Это казалось бы малосущественное отличие приводит к качественно важным следствиям. В самом деле, семейства характеристик для (10.76) имеют вид

$$x - \frac{vt}{m_0}\left(1 - \frac{\sqrt{M_0}}{m_0}\right)^{-1} = \text{const},$$

$$x - \frac{vt}{m_0}\left(1 + \frac{\sqrt{M_0}}{m_0}\right)^{-1} = \text{const} \qquad (10.77)$$

и, следовательно, скорости распространения возмущений

$$v_1 = \frac{v}{m_0}\left(1 - \frac{\sqrt{M_0}}{m_0}\right)^{-1}, \quad v_2 = \frac{v}{m_0}\left(1 + \frac{\sqrt{M_0}}{m_0}\right)^{-1} \qquad (10.78)$$

зависят от возмущающего параметра $\sqrt{M_0}/m_0$ мультипликативно, в то время как скорости фронтов для уравнения (10.28) зависят от фактора B/m_0^2 аддитивно. Поэтому при фильтрации в поле случайной скорости фильтрации средняя скорость движения границы — поршня равнялась невозмущенной скорости. В случае, если случайна пористость, из (10.78) имеем для $v_{\text{ср}} = (v_1 + v_2)/2$

$$v_{\text{ср}} = \frac{v}{m_0}\left(1 - \frac{M_0}{m_0^2}\right)^{-1}. \qquad (10.79)$$

Очевидно, $v_{\text{ср}} > v/m_0$, т. е. граница в среднем движется быстрее, чем в невозмущенной среде. Из (10.79) для эффективной пористости имеем

$$m^* = m_0\,(1 - M_0/m_0^2). \qquad (10.80)$$

Сравнив (10.80) с (10.65) — точным значением m^*, легко заметить их естественную связь. Формула (10.80) — квадратическое приближение (10.65).

Перейдем к анализу задачи Коши для полного локализованного уравнения (10.76), выбрав в качестве дополнительных условий начальное распределение концентрации и начальную производную по времени, найденную из усредненного интегро-дифференциального уравнения (10.72) при $t = 0$,

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -\frac{v}{m_0\,(1 - \psi^2)} f'(x). \qquad (10.81)$$

Для уяснения физического смысла членов уравнения (10.76) целесообразно перейти к новой, подвижной системе координат, «плывущей» со скоростью $v_{\text{ср}}$. Итак, при новой пространственной переменной

$$y = x - (v_1 + v_2)\,t/2$$

уравнение (10.76) принимает вид

$$m_0(1-\psi^2)\frac{\partial u}{\partial t}-v\psi^2\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon m_0(1-\psi^2)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\varepsilon\psi^2 v^2}{m_0}\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}, \quad (10.82)$$

где

$$\psi=\sqrt{M_0}/m_0.$$

Отсюда видно, что перенос в «плывущей» системе координат осуществляется с конечной скоростью возмущений

$$c=v\psi/m_0(1-\psi^2) \quad (10.83)$$

Эффективный коэффициент дисперсии имеет вид

$$\varkappa^2=v^2\varepsilon\psi^2/m^*, \quad (10.84)$$

а эффективная пористость —

$$m^*=m_0(1-\psi^2). \quad (10.85)$$

В системе реализуется регулярный конвективный снос против основного течения со скоростью

$$v=-v\psi^2, \quad (10.86)$$

поэтому распределение концентрации будет иметь тенденцию постепенного обеднения передней части возмущенной зоны при относительном накоплении, а точнее, более медленном обеднении вещества в области заднего фронта.

Относительное влияние дисперсионного и волнового переноса целесообразно оценить как отношение длины зоны дисперсионного обмена $\sim\varkappa\sqrt{t}/m_0$ и параметра ct, характеризующего длину возмущенной зоны. Очевидно

$$\lambda=\varkappa\sqrt{t}/m_0ct=(1-\psi^2)\sqrt{\varepsilon/t}.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших временах t вдали от фронтов влияние волнового переноса мало по сравнению с дисперсионным.

Перейдем к решению уравнения (10.76) при дополнительных условиях (10.81). Для этого введем переменные ζ и η

$$\zeta=\alpha(x-v_1t), \quad \eta=\alpha(x-v_2t),$$
$$\alpha=m_0(1-\psi^2)^{1/2}/(2\varepsilon v\psi) \quad (10.87)$$

и новую функцию

$$W=u\exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda\zeta+\mu\eta)\right], \quad (10.88)$$

$\lambda=-m_0(1-\psi)/2\varepsilon\alpha v\psi$, $\mu=m_0(1+\psi)/2\zeta\alpha v\psi)$, для которой из (10.76) и (10.81) получим уравнение

$$\partial^2W/\partial\zeta\partial\eta+W/4=0 \quad (10.89)$$

с условиями на прямой $\zeta=\eta$:

$$W(\zeta,\eta)_{\zeta=\eta}=f(\zeta/\alpha)\exp\left[-\frac{\psi\zeta}{(1-\psi^2)^{1/2}}\right], \quad (10.90)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}-\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)_{\zeta=\eta}=f\left(\frac{x}{\alpha}\right)(1-\psi^2)^{-1/2}\exp\left[-\frac{\phi\zeta}{(1-\psi^2)^{1/2}}\right]. \quad (10.91)$$

Задача (10.89)—(10.91) решается методом Римана и в переменных x, t решение имеет вид

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left\{f(x-v_1t)\exp\left(-\frac{v_1m_0t}{2\varepsilon v}\right)+f(x-v_2t)\exp\left(-\frac{v_2m_0t}{2\varepsilon v}\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x-v_1t}^{x-v_2t}\left[\frac{m_0}{2\varepsilon\psi v}J_0\left(\alpha\sqrt{\gamma}\right)+\frac{(v_1-v_2)\,\alpha t}{\sqrt{\gamma}}J_0'\left(\alpha\sqrt{\gamma}\right)\right]\exp\left[\frac{m_0(\zeta-x)}{2\varepsilon v}\right]f(\zeta)\,d\zeta\right\}, \quad (10.92)$$

$$\gamma=[\zeta-(x-v_1t)][\zeta-(x-v_2t)]. \quad (10.93)$$

Рассматривая предельный случай $t\ll\varepsilon$ и ограниченные начальные распределения $f(x)$, из (10.92) получим

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left\{\left[1-\frac{t}{2\varepsilon(1-\psi)}\right]f(x-v_1t)+\left[1-\frac{t}{2\varepsilon(1+\psi)}\right]f(x-v_2t)\right\}, \quad (10.94)$$

т. е. произвольное начальное распределение $f(x)$ распадается на две подобных ему волны, движущиеся со скоростями v_1 и v_2. При этом более быстрая волна имеет меньшую высоту. Уместно отметить, что в аналогичной задаче при постоянной пористости и случайной скорости высоты волн были одинаковыми, а их средняя скорость равнялась невозмущенной скорости. В только что рассмотренном случае средняя скорость волн больше невозмущенной.

Вернемся к общему случаю произвольного $f(x)$ и рассмотрим начальное распределение $f(x)=q\delta(x)$. Легко видеть, что при любом t на фронтах возмущенной зоны $v_2t\leqslant x\leqslant v_1t$ сосредоточено конечное количество вещества примеси. На переднем фронте

$$q_1=\frac{q}{2}\exp\left[-\frac{t}{2\varepsilon(1-\psi)}\right], \quad (10.95)$$

соответственно на заднем фронте

$$q_2=\frac{q}{2}\exp\left[-\frac{t}{2\varepsilon(1+\psi)}\right]. \quad (10.96)$$

Фронтовые порции быстро (экспоненциально) убывают со временем, но скорости убывания несколько различаются. На переднем фронте скорость убывания выше и, следовательно, сама порция меньше. Между фронтами концентрация распределена в соответствии с равенством

$$u(x,\ t)=\frac{qm_0}{4\varepsilon v\psi}\left[I_0\left(\frac{\bar t}{2}\sqrt{\frac{1-\bar\Delta^2}{1-\psi^2}}\right)+\sqrt{\frac{1-\psi^2}{1-\bar\Delta^2}}I_1\left(\frac{\bar t}{2}\sqrt{\frac{1-\bar\Delta^2}{1-\psi^2}}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[\frac{\bar t(1-\psi\bar\Delta)}{2(\psi^2-1)}\right], \quad (10.97)$$

$$\bar t=t/\varepsilon,\quad \bar\Delta=\frac{\Delta}{\rho},\quad \rho=\frac{(v_1-v_2)t}{2},\quad \Delta=\frac{x-v_{cp}t}{\rho}. \quad (10.98)$$

Очевидно, параметр ρ — половина расстояния между фронтами, а Δ — отклонение точки x от середины возмущенной зоны, положительное для точек x, лежащих справа от середины и отрицательное, для находящихся слева.

Для точек x значительно удаленных от фронтов, $\Delta \ll \rho$, $\bar{\Delta} \ll 1$ и потому для времени, значительно большего времени корреляции ε допустимо использовать асимптотические представления бесселевых функций мнимого аргумента. После упрощений получим в окрестности точки $\bar{\Delta} = \psi$

$$u(x, t) = \frac{qm_0}{4\psi v\sqrt{\pi\varepsilon t}}\left[2 + \frac{3m_0}{2vt}\left(x - \frac{vt}{m_0}\frac{1+\psi^2}{1-\psi^2}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{[x - vtm_0^{-1}(1+\psi^2)(1-\psi^2)^{-1}]^2}{4\varepsilon v^2\psi^2 m_0^{-2}(1+\psi^2)^{-1}t}\right\}, \qquad (10.99)$$

т. е. в окрестности точки, движущейся со скоростью $vm_0^{-1}(1+\psi^2)\times$ $\times(1-\psi^2)^{-1}$ распределение концентрации близко к нормальному с коэффициентом дисперсии $x^2(1-\psi^2)(1+\psi^2)^{-1}$. В отличие от нормального, оно обладает некоторой асимметрией — правая ветвь убывает несколько медленней левой, что можно объяснить видом зависимости характеристических скоростей v_1 и v_2 от ψ и ее следствием — более быстрым переходом вещества примеси с переднего фронта в возмущенную зону.

При изучении дисперсии примеси в поле случайной скорости фильтрации было показано, что вдали от фронтов решение локализованного гиперболического уравнения переноса близко к решению параболического уравнения (10.18), полученного при помощи грубой локализации при малых временах корреляции ε. Рассмотрим возможность грубой локализации уравнения переноса примеси в среде со случайной пористостью. Вернувшись к нелокальному уравнению (10.72) и проведя рассуждения, вполне аналогичные изложенным в первом разделе данной главы, получим уравнение

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M\varepsilon}{m_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (10.100)$$

и будем искать его решение при условиях (10.81)

$$u(x, 0) = f(x),\ \partial u(x, 0)/\partial t = -vm_0^{-1}(1-\psi^2)^{-1}f'(x).$$

Легко убедиться, что уравнение (10.100) параболическое, его характеристики — прямые, параллельные оси x, на которой определены начальные условия, следовательно задача поставлена некорректно. Рассмотрим иной вариант задания дополнительных условий. Пусть изучается смешанная задача для уравнения (10.100) в области $x>0$, $t>0$ и в качестве дополнительных условий зафиксируем $u(x, 0)$ и $u(0, t)$. Такая задача имеет единственное и устойчивое решение, но и она поставлена некорректно. Причина этого заключена в том, что область зависимости значений $u(x, t)$, заданных на оси t, т. е. при $x=0$ — весь квадрант $(x>0,\ t>0)$

и, следовательно, на решение $u(x, t)$ оказывает влияние $u(0, \tau)$ при $\tau > t$, т. е. «будущее» влияет на «прошлое», что конечно неприемлемо. Таким образом, задание в определенной степени естественных дополнительных условий для уравнения (10.100) приводит к некорректным постановкам задач и, следовательно, к невозможности их решения. Отсюда следует необходимость переформулировки задачи за счет регуляризации уравнения (10.100). Вернемся вновь к уравнению (10.100) и запишем его в виде

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = O(M\varepsilon). \tag{10.101}$$

С точностью до малых более высокого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{v}{m_0} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{v^2}{m_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{10.102}$$

подставив u_{tt} из (10.102) в правую часть (10.100), получим приближенное регуляризованное уравнение

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon M v^2}{m_0^3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{10.103}$$

Очевидно, уравнение (10.103) параболическое, для него корректны как задача Коши, так и смешанная задача. При этом оно первого порядка по времени и в качестве начального условия достаточно задать $u(x, 0)$. Задачи такого рода и методы их решения хорошо изучены, известно решение регуляризованного уравнения (10.103). Ясно, что регуляризованное уравнение описывает дисперсию с коэффициентом дисперсии, даваемым формулой (10.84). При этом утрачены эффекты распространения возмущений с конечной скоростью и регулярного сноса вещества против течения.

Заметим, что рассмотрение многомерных течений в среде со случайной пористостью и неслучайной скоростью фильтрации, если ось x совмещена с направлением скорости фильтрации, приводит к полученным одномерным уравнениям. Этот результат обусловлен тем, что пористость не входит в уравнения фильтрации, а содержится лишь в уравнении переноса примеси.

И еще одно замечание. Проследив за всеми этапами грубой локализации уравнения (10.72), в итоге которых получено уравнение (10.100), можно предполагать, что причиной возникших затруднений послужила перемена порядка дифференцирования по времени и локализации интеграла в (10.72). Вернемся вновь к уравнению (10.72) и проведем его локализацию, не меняя указанного порядка. Продифференцировав интеграл в (10.79) по параметру t и локализовав полученные интегралы, получим уравнение

$$\frac{v\varepsilon M_0}{m_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{10.104}$$

Очевидно, оно гиперболического типа, семейства его характеристик $x = \text{const}$, $t = \text{const}$. Если например, рассмотреть область $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, то для уравнения (10.104) можно поставить начально-

краевую задачу, фиксирующую начальное распределение искомой функции $u(x, 0)=f(x)$ и распределение ее на другой границе $u(0, t)=\varphi(t)$. Такая задача с дополнительными условиями на характеристиках называется обычно задачей Гурса и поставлена корректно, если начальное и краевое условия согласованы, т. е. $f(0)=\varphi(0)$. Задачи такого типа нередко встречаются в теории сорбционных явлений.

Пусть, например, заданы условия

$$u(x, 0)=0,\ u(0, t)=u_0(1-e^{-\lambda t}),\ \lambda>0 \qquad (10.105)$$

очевидно согласованные, и при достаточно больших λ приводящие в невозмущенной задаче к решению — «полочке», движущейся со скоростью v/m_0. Решение задачи (10.104), (10.105), полученное операционным методом, имеет вид

$$u(x, t)=u_0\exp\left(-\frac{m_0^3 x}{v\varepsilon M_0}\right)\left\{(1-e^{-\lambda t})+\right.$$

$$\left.+\frac{m_0^2\sqrt{m_0 x}}{\varepsilon M\sqrt{v}}\int_0^t \exp\left(-\frac{m_0^2\tau}{\varepsilon M_0}\right) I_1\left(\frac{2m_0^2\sqrt{m_0 x\tau}}{\varepsilon M_0\sqrt{v}}\right)[1-e^{-\lambda(t-\tau)}]\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\right\}, \qquad (10.106)$$

где $I_1(z)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка от мнимого аргумента.

Анализ соотношения (10.106) показывает, что профиль $u(x, t)$ является пологой волной, крутизна которой со временем убывает. Для любых $x>0$ и $t>0$ решение $u(x, t)>0$. Это означает, что хотя уравнение (10.104) гиперболического типа, малые возмущения, как и для линейных уравнений параболического типа, распространяются с бесконечной скоростью.

Так как уравнение (10.104) имеет первый порядок по времени, для него может быть поставлена начальная задача Коши, в которой фиксируется $u(x, 0)=f(x)$. Можно показать, что при $f(x)=q\delta(x)$ и $t\gg\varepsilon$ решение такой задачи стремится к решению уравнения (10.103). Таким образом, грубая локализация, заключающаяся в замене корреляционной функции ее дельтаобразным приближением, и в уточненном варианте, сохраняя дисперсионный механизм переноса, сопряжена с потерей эффекта конечности скорости распространения возмущений и регулярного сноса примеси против течения.

ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ ПОЛЕМ СЛУЧАЙНОЙ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

Ранее был изучен перенос примеси полем случайной скорости фильтрации в предположении постоянства коэффициента пористости. Затем был рассмотрен вариант процесса переноса в среде со случайной пористостью, но при этом скорость фильтрации считалась неслучайной. Рассмотрим теперь интересующий нас процесс переноса при совместном действии двух возмущающих факторов — случайного коэффициента пористости и скорости. Сначала

будет проанализировано одномерное модельное, а затем и многомерное течения. В случае многомерного течения случайность поля скорости фильтрации будет связана со случайностью поля проницаемости и, следовательно, фильтрационный перенос будет изучаться в средах со случайной пористостью и проницаемостью. При этом будет учтена возможная коррелированность этих полей.

Вернемся к одномерной модельной задаче

$$dx/dt = v/m,\ x\ (0) = 0 \tag{10.107}$$

и будем считать v и m случайными величинами.

Усреднив (10.107) и положив $v = W + v'$, $m = m_0 + m'$, $W = <v>$, ограничимся учетом квадратичных по флуктуациям членов. Тогда

$$<\frac{dx}{dt}> = \frac{W}{m_0}\left(1 + \frac{M_0}{m_0^2} - \frac{\sqrt{BM_0}}{Wm_0}\gamma\right), \tag{10.108}$$

$$\gamma = <v'm'>/\sqrt{BM_0}.$$

Нетрудно видеть, что при равенстве коэффициента корреляции нулю в рамках принятого приближения формула (10.108) совпадает с (10.66), т. е., если v и m некоррелированы, увеличение средней скорости по сравнению с невозмущенной W/m_0 целиком определяется флуктуациями пористости. Если же v и m коррелированы, то эффект увеличения скорости зависит от знака γ. Отрицательная корреляция усиливает эффект, положительная ослабляет. Физическая интерпретация достаточно очевидна: при отрицательной корреляции реализациям с пониженной пористостью соответствуют в среднем повышенные скорости фильтрации и, следовательно, существенно повышенные скорости фронтов. При положительной корреляции действует нивелирующий механизм. При определенных соотношениях ($v/m = \text{const}$) фронты во всех реализациях двигаются синхронно — нет дисперсии. Таким образом, при описании дисперсии примеси целесообразно учесть корреляцию скорости фильтрации и пористости.

Рассмотрим перенос примеси квазиодномерным потоком, средняя скорость которого постоянна, а флуктуации скорости являются статистически однородным случайным полем. Будем полагать, что для локальных концентрации и фильтрационных переменных справедлива система уравнений

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v}\nabla c = 0,\ \vec{v} = -\sigma\nabla p,\ \operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{10.109}$$

Здесь $m(\vec{x})$, $\sigma(\vec{x})$ — случайные поля пористости и проводимости, функции вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; p — давление; $\vec{v}$ — вектор скорости фильтрации.

Представив поля m, σ, v, c в виде

$$m = m_0 + m',\ m_0 = <m>,\ \sigma = \sigma_0 + \sigma',\ \sigma_0 = <\sigma>, \tag{10.110}$$

$$\vec{v} = \vec{W} + \vec{v}', \quad \vec{W} = \langle \vec{v} \rangle, \quad c = u + c', \quad u = \langle c \rangle,$$

усредним первое уравнение из (10.109)

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W} \nabla u = - \left\langle m' \frac{\partial c'}{\partial t} \right\rangle - \langle \vec{v} \nabla c' \rangle. \qquad (10.111)$$

Вычтя из первого уравнения (10.109) уравнение (10.111) и сохранив главные члены, получим

$$m_0 \frac{\partial c'}{\partial t} + \vec{W} \nabla c' = - m' \frac{\partial u}{\partial t} - \vec{v}' \nabla u. \qquad (10.112)$$

Дополнительные детерминированные условия, наложенные на c, отнесем к u, тогда соответствующие условия для c' являются однородными и, следовательно,

$$c'(\vec{x}, t) = - \frac{1}{m_0} \int_0^t \left[m'(\vec{z}) \frac{\partial u(\vec{z}, \tau)}{\partial \tau} + \vec{v}'(z) \nabla_z u(\vec{z}, \tau) \right] d\tau, \qquad (10.113)$$

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{W} m_0^{-1} (t - \tau).$$

Подставив (10.113) в правую часть (10.111), после усреднения и преобразований получим нелокальное уравнение многомерного переноса

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \nabla u = \frac{1}{m_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t M(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\partial u(\vec{z}, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \vec{N}(\vec{x}, \vec{z}) \nabla_z u(\vec{z}, \tau) d\tau + \int_0^t \operatorname{div}_x \vec{N}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\partial u(\vec{z}, \tau)}{\partial \tau} d\tau +$$

$$\left. + \int_0^t \vec{N}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\partial \nabla_x u(\vec{z}, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_0^t \sum_{i,j} B^{ij}(\vec{x}, \vec{z}) \frac{\partial^2 u(\vec{z}, \tau)}{\partial x_i \partial z_j} d\tau \right\}, \qquad (10.114)$$

$$\vec{N}(\vec{x}, \vec{z}) = \langle m'(\vec{x}) \vec{v}'(z) \rangle.$$

Предполагая, что поля $\sigma(\vec{x})$ и $m(\vec{x})$ однородны и изотропны, что их взаимная корреляция также однородна, изотропна и стремится к нулю в бесконечности, легко при помощи найденных в главе 5 корреляционных моментов подсчитать вектор $\vec{N}(\vec{x}, \vec{x})$ для трехмерных и двумерных течений:

для трехмерного поля

$$\vec{N}(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{2}{3} \rho \vec{W} \sqrt{M_0 \bar{\sigma}}, \quad \bar{\sigma} = \langle \sigma'^2 \rangle^{1/2}, \qquad (10.115)$$

$$\rho = \langle \sigma' m' \rangle / \bar{\sigma} \sqrt{M_0};$$

для двумерного поля

$$\vec{N}(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{2} \rho \vec{W} \sqrt{M_0 \bar{\sigma}}. \qquad (10.116)$$

Корреляции M и B^{ij} определены из соотношений (10.72) и (10.42), а тензор B^{ij} для трехмерных и двумерных течений вычислен в главе 5.

Изучим возможности локализации уравнений (10.114), рассмотрев, как обычно, сначала одномерное течение. Наличие двух случайных функций v и m, а также учет их корреляций значительно сужает возможности способа локализации, примененного для задач, в которых фигурировало одно случайное поле — v или m. Определенные осложнения связаны и с тем, что корреляции $M(\vec{x}, \vec{z})$ и $B^{ij}(\vec{x}, \vec{z})$ могут иметь различные временные масштабы; соответственно ε_m и ε_v.

Далее мы приведем локализованные уравнения для некоторых частных случаев, для которых удалось провести стандартную операцию локализации. Так, если поля $\vec{v}$ и m некоррелированы, то $\vec{N} = 0$, а корреляции M и B имеют вид

$$M(\vec{x}, \vec{z}) = M_0 \exp[(\tau - t)/\varepsilon_m],$$

$$B^{ij}(\vec{x}, \vec{z}) = B \exp[(\tau - t)/\varepsilon_v)], \quad t \geqslant \tau,$$

то для $u(\vec{x}, t)$ можно записать уравнение третьего порядка

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{W^2}{m_0}[\varepsilon_m + \varepsilon_v(1 - \varphi^2)] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+ m_0[\varepsilon_v + \varepsilon_m(1 - \psi^2)] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v(\varepsilon_m + \varepsilon_v) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} +$$

$$+ \varepsilon_m \varepsilon_v \left[\frac{W^3(1 - \varphi^2)}{m_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{W^2(3 - \varphi^2)}{m_0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + W(3 - \psi^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \right.$$

$$\left. + m_0(1 - \psi^2) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right] = 0, \quad \varphi^2 = B/W^2. \tag{10.117}$$

Можно показать, что при $\varepsilon_m = \varepsilon_v = \varepsilon$ средняя концентрация удовлетворяет уравнению второго порядка

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \left[m_0(1 - \psi^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + 2W \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{W^2(1 - \varphi^2)}{m_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0, \tag{10.118}$$

являющемуся естественным обобщением уравнения (10.28) — переноса полем случайной скорости и уравнения (10.76) — переноса в среде со случайной пористостью. Кажущаяся несводимость уравнения (10.117) к уравнению (10.118) при $\varepsilon_m = \varepsilon_v = \varepsilon$ в действительности не является противоречием. Можно доказать, что все решения уравнения (10.118) являются одновременно решениями уравнения третьего порядка (10.117). Обратное, строго говоря,

неверно. Однако задание непротиворечивых дополнительных условий делает уравнения (10.118) и (10.117) при $\varepsilon_m=\varepsilon_v=\varepsilon$ эквивалентными.

Легко видеть, что решение уравнения (10.118) при дополнительных условиях (10.81) качественно близко решению задачи о переносе в среде со случайной пористостью. Возмущения распространяются с характеристическими скоростями

$$v_1=\frac{W}{m_0}\frac{1-\varphi^2}{1+\sqrt{\varphi^2+\psi^2-\varphi^2\psi^2}},$$

$$v_2=\frac{W}{m_0}\frac{1-\varphi^2}{1-\sqrt{\varphi^2+\psi^2-\varphi^2\psi^2}}. \qquad (10.119)$$

Средняя характеристическая скорость

$$(v_1+v_2)/2=-(Wm_0^{-1})(1-\psi^2)^{-1}$$

не зависит от флуктуаций скорости фильтрации. Можно показать, что возмущая скорость фильтрации, мы увеличиваем скорость переднего фронта и на столько же уменьшаем скорость заднего. Как и в ранее разобранных случаях, решение вдали от фронтов является несколько деформированным решением параболического уравнения. Грубая локализация уравнения (10.114) в одномерном случае приводит к дифференциальному уравнению

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{m_0}\left(\varepsilon_m M_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon_v B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \qquad (10.120)$$

При этом поля $v(t)$ и $m(x)$ считаются некоррелированными. Такое ограничение связано с тем, что в одномерном случае естественно считать корреляцию N постоянной и, следовательно, имеющей неограниченное время корреляции. Поскольку грубая локализация допустима лишь при условии малости времени корреляции, получить локализованное уравнение можно лишь при условии $N=0$.

Поставить для уравнения (10.120) корректную задачу можно лишь проведя регуляризацию. Действительно, уравнение (10.120) принадлежит к эллиптическому типу. Задание при $t=0$ функций $u(x,\ 0)$, $\partial u(x,\ 0)/\partial t$ приводит к некорректной задаче Коши, как известно, неустойчивой по начальным данным. Если поставить смешанную задачу в области $x>0$, $t>0$, то, как это уже было с уравнением (10.100), нарушается принцип причинности.

Для регуляризации, как и ранее, положив в (10.120)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{W^2}{m_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

получим параболическое уравнение переноса

$$m_0\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{m_0}\left(\frac{\varepsilon_m M_0 W^2}{m_0^2}+\varepsilon_v B\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (10.121)$$

для которого корректны как задача Коши, так и смешанная задача.

Перейдем теперь к грубой локализации уравнения многомерного переноса (10.114). Полагая, что система координат приведена к главным осям тензора B^{ij}, ε_v^i — времена корреляции компонентов скорости v_i, $\tilde{\varepsilon}_i$ — время корреляции компонент вектора $\vec{N}$, получим

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W} \nabla u = \frac{1}{m_0} \left\{ \varepsilon_m M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_i N_i \tilde{\varepsilon}_i \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} + \sum_i B^{ii} \varepsilon_v^i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\}. \qquad (10.122)$$

Хотя, вообще говоря, времена корреляции ε_m, $\tilde{\varepsilon}_i$, ε_v^i могут быть различными, далее мы будем, безусловно упрощая ситуацию, считать их одинаковыми. Некоторым основанием для этого является то, что мы полагаем неоднородность поля скоростей порождаемой флуктуациями поля проводимости σ, которые, в свою очередь, как и флуктуации пористости m, в определенных условиях связаны с нерегулярностью процесса осадконакопления и других факторов, формирующих емкостные и массопроводящие свойства естественных пористых материалов. Это предположение тем более приемлемо, чем выше модуль коэффициента корреляции пористости и проницаемости.

Итак, далее $\varepsilon_m = \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_v^i = \varepsilon$. Совместив ось x_1 с вектором W, получим уравнение для трехмерного переноса

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon}{m_0} \left(M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4 \bar{\sigma} \rho}{3 \sigma_0} \sqrt{M_0} W \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1} + \sum_i^3 B^{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right), \qquad (10.123)$$

$$B = \frac{\bar{\sigma}^2 W^2}{15 \sigma_0^2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для двумерного поля имеем аналогично

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\varepsilon}{m_0} \left(M_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{\sigma} \rho}{\sigma_0} \sqrt{M_0} W \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_1} + \sum_i^2 B^{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right), \qquad (10.124)$$

$$B = \frac{\bar{\sigma}^2 W^2}{8 \sigma_0^2} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Регуляризуя, как обычно, уравнения (10.123) и (10.124), получим параболические уравнения трехмерного и двумерного переноса соответственно

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{a |W| \zeta^2}{15} \left[(15\lambda^2 - 20\lambda\rho + 8) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right], \quad (10.125)$$

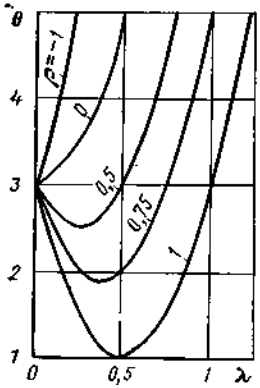


Рис. 70. Зависимость отношения θ продольной и поперечной компонент тензора дисперсии от параметров λ и ρ для плоского течения

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{a|W|\zeta^2}{8}\left[(8\lambda^2 - 8\lambda\rho + 3)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right], \qquad (10.126)$$

где $\zeta = \bar{\sigma}/\sigma_0$, $\lambda = \sqrt{M_0}/m_0\zeta$, а пространственный масштаб неоднородности a связан с временем корреляции формулой $a = \varepsilon|W|/m_0$.

Нетрудно убедиться, что при любых значениях коэффициента корреляции ρ, коэффициента вариации проницаемости ζ и параметра λ — отношения коэффициентов вариации пористости и проницаемости коэффициенты продольной и поперечной дисперсии для трехмерных и двумерных полей положительны. Поэтому корректно задание для уравнений (10.125) и (10.126) начальных распределений $u = u(x, 0)$ и соответствующих условий на границах при $t = 0$. Можно видеть, что флуктуации пористости влияют только на коэффициент продольной дисперсии, а флуктуации проницаемости — на коэффициенты продольной и поперечной дисперсии. Отрицательная корреляция пористости и проницаемости усиливает продольную дисперсию, а положительная ослабляет тем сильнее, чем больше $|\rho|$.

Если считать ζ фиксированным, то для каждого $\rho > 0$ существует λ^*, для которого коэффициент продольной дисперсии минимален. Так, в случае плоского течения $\lambda^* = \rho/2$, для пространственного течения $\lambda^* = 2\rho/3$. На рис. 70 приведена зависимость отношения продольной и поперечной компонент тензора дисперсии от параметров λ и ρ для плоского течения. Можно видеть, что «внесение» в пористую среду достаточно малых возмущений пористости приводит при $\rho > 0$ к уменьшению θ, т. е. продольной компоненты, которая в интервале $0 < \lambda < \lambda^*$ может существенно отличаться от невозмущенной по λ продольной компоненты. Так, при $\rho = 1$ и $\lambda = 1/2$ величина $\theta = 1$, т. е. тензор дисперсии изотропен, в то время как при $\lambda = 0$ дисперсия существенно анизотропна, так как $\theta = 3$. В определенной степени парадоксально, но взаимодействие потока с полями пористости и проницаемости в случае $\rho = 1$, $\lambda = 1/2$ приводит к изотропному рассеянию примеси. Например, круглое пятно «меченой» жидкости, помещенное в такой поток, будет двигаться по потоку, расширяясь, но не меняя формы.

В случае пространственной фильтрации минимальное значение θ, реализуемое при $\rho = 1$, $\lambda = 2/3$, составляет $4/3$. Это означает, что дисперсия при фильтрации в трехмерном пространстве анизотропна при любых соотношениях определяющих параметров. Шар меченой жидкости, двигаясь по потоку, деформируется в эллип-

соид вращения. Однако при минимальном θ степень его вытянутости невелика — $^2/\sqrt{3} \approx 1{,}15$. Для сравнения уместно подчеркнуть, что при невозмущенном по пористости течения ($\lambda=0$) величина $\theta=8$, вытянутость упомянутого эллипсоида составляет $\sqrt{8} \cong 2{,}8$, т. е. анизотропия весьма существенна.

При рассмотрении одномерных течений отмечалась возможность ситуации, при которой выбор функций $v(t)$ и $m(x)$ таков, что хотя обе они флуктуируют, дисперсия отсутствует. Легко видеть, что в многомерном случае дисперсию можно аннулировать только при отсутствии флуктуаций пористости и проницаемости. Однако из рассмотренных примеров видно, что при определенных комбинациях этих полей дисперсионные эффекты можно существенно снизить.

Отмеченные эффекты имеют следующее качественное объяснение. Так, например, независимость поперечных компонент тензора дисперсии от флуктуаций пористости объясняется независимостью поля скоростей фильтрации от пористости и некоррелированностью поперечных пульсаций скорости с проницаемостью, а следовательно и с пористостью. Напротив, корреляция продольных пульсаций скорости фильтрации с проницаемостью определяет зависимость продольной компоненты тензора дисперсии от флуктуаций пористости при $\rho=0$. При этом существенно, что интенсивность переноса и дисперсии примеси положительно коррелирует с модулем скорости фильтрации и отрицательно — с пористостью. Поэтому при положительной корреляции пористости и проницаемости наблюдается эффект уменьшения анизотропии дисперсии. Возможность в плоском течении полной изотропии дисперсии определяется относительно меньшей по сравнению с пространственным течением анизотропией невозмущенного по пористости тензора дисперсии (при $\lambda=0$, $\theta=3$), в то время как в трехмерном пространстве $\theta=8$ при $\lambda=0$. Кроме того, коэффициент корреляции модуля скорости и проницаемости на плоскости меньше, чем в пространстве.

Заметим в заключение, что как и в случае течения в среде флуктуирующей пористостью, процедуру локализации исходного уравнения (10.114) можно провести аккуратнее, т. е. лишь после дифференцирования интегралов по параметру γ. Можно показать, что при таком порядке локализации из (10.114) получается дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$m_0 \frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\epsilon}{m_0}\left[(N + MW/m_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} + \right.$$

$$\left. + (B^{11} - NW/m_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + B^{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + B^{33}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right].$$

Как и в случае уравнения (10.104), для него можно поставить корректно задачу с данными на характеристиках — задачу Гурса.

Легко убедиться, что регуляризация последнего уравнения при помощи невозмущенного уравнения приводит к параболическому уравнению, тождественному (10.125) или (10.126), в зависимости от того, какова размерность рассматриваемого течения.

Перенос примеси в неоднородных средах с учетом адсорбционных явлений

Как известно, фильтрационный перенос примеси в той или иной степени сопровождается взаимодействием частиц примеси с твердой поверхностью пористой среды. Это взаимодействие может иметь различную физическую и химическую природу в зависимости от свойств примеси и характера поверхности и жидкости. При определенных условиях адсорбция, т. е. поглощение или выделение частиц примеси твердой фазой, может считаться равновесной и линейной. В этом случае уравнения фильтрационного переноса с учетом адсорбционного обмена имеют вид

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v}\nabla c + \frac{\partial a}{\partial t} = 0, \tag{10.127}$$

$$a = \Gamma(\vec{x})\, c. \tag{10.128}$$

Здесь $a(\vec{x}, t)$ — адсорбция примеси, т. е. ее количество в твердой фазе, заключенной в единице объема; $\Gamma(\vec{x})$ — коэффициент Генри, связывающий адсорбцию с равновесной ей концентрацией. Далее мы будем полагать, что коэффициент Генри, зависящий от структуры поверхности твердой фазы, также является случайным полем, зависящим от координат и коррелирующим с полями пористости и проницаемости. Подставив (10.128) в (10.127), получим

$$m_s\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v}\nabla c = 0,\ m_s = m + \Gamma, \tag{10.129}$$

т. е. формально учет равновесной линейной сорбции не меняет вида уравнения переноса, а только трансформирует коэффициент при производной по времени. Поэтому остаются в силе усредненные уравнения многомерного переноса (10.125) и (10.126), в которых необходимо сделать следующие замены параметров:

$$m_0 \to m_s^0,\ M_0 \to \langle m_s'^2\rangle,\ \rho \to \rho_*, \tag{10.130}$$

где

$$m_s^0 = m_0 + \Gamma_0,\ \Gamma_0 = \langle\Gamma\rangle,\ \nu^2 = \langle\Gamma'^2\rangle,$$
$$\langle m_s'^2\rangle = M_0 + \nu^2 + 2\nu\sqrt{M_{0\rho}}\,(m, \Gamma),$$
$$\rho_* = \langle m_s'^2\rangle^{-1/2}\left[\sqrt{M_{0\rho}}\,(\sigma, m) + \nu\rho\,(\sigma, \Gamma)\right]. \tag{10.131}$$

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ДИСПЕРСИИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Ранее мы рассмотрели ряд задач, в которых стохастическое уравнение переноса являлось объектом усреднения с целью получения уравнения для средней концентрации или насыщенности. Возникающую при этом проблему замыкания и локализации удается

решить приближенно лишь при наличии в задаче малых параметров, например, малости времени корреляции и т. п. Естественно ожидать, что используя стохастическое уравнение с соответствующими дополнительными условиями, в принципе можно построить не только уравнение для средней концентрации, но и получить исчерпывающую характеристику концентрации — плотность распределения вероятности. Далее, следуя работе [13], мы приведем методы получения замкнутых уравнений для плотности вероятности концентрации, переносимой случайным полем скорости. Эти методы основаны на способах функционального описания случайных полей, и потому их изложение необходимо предварить рядом сведений из этой области. Более подробное описание можно найти в работах [13, 21, 28].

Подобно тому, как случайная величина ζ полностью описана, если задана ее характеристическая функция

$$\varkappa(\lambda) = < \exp(i\lambda\zeta) >, \tag{10.132}$$

случайная функция $z(t)$ полностью определена, если задан ее характеристический функционал

$$\Phi[\lambda] = < \exp\left\{i \int \lambda(\tau)\, z(\tau) d\tau\right\} >. \tag{10.133}$$

Например, характеристический функционал для гауссова процесса с нулевым средним имеет вид

$$\Phi[\lambda] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint B(\tau_1, \tau_2)\,\lambda(\tau_1)\,\lambda(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2\right\}. \tag{10.134}$$

Аналогично записывается характеристический функционал для многомерной случайной функции — поля.

Решение многих рассмотренных ранее задач так или иначе сводилось к вычислению корреляций двух функционалов F и R, определенных на случайном поле

$$A = < F[z(\tau)]\, R[z(\tau)] >. \tag{10.135}$$

В некоторых случаях эту корреляцию можно представить в виде произведения средних функционалов. В этом случае говорят о расщеплении корреляций. Пусть функционал $F[z(\tau)] = z(t')$, т. е. A является корреляцией случайной функции в момент времени t' с функционалом $R[z]$. В этом случае справедлива формула

$$< z(t')\, R[z(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_n, \ldots, \int K_{n+1}(t', t_1 \ldots, t_n) \times$$

$$\times < \frac{\delta^n R[z]}{\delta z(t_1), \ldots, \delta z(t_n)} > dt_1, \ldots, dt_n. \tag{10.136}$$

Здесь под знаком интеграла функционал $R[z]$ подвергнут n раз операции вариационного дифференцирования, а $K_{n+1}(t', t_1, \ldots, t_n)$ — кумулянты (семиинварианты) процесса

$$K_{n+1}(t', t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{i^{n+1}} \frac{\delta^{n+1}\theta[\lambda]}{\delta\lambda(t')\delta\lambda(t_1), \ldots, \delta\lambda(t_n)}. \tag{10.137}$$

Здесь $\theta[\lambda] = \ln \Phi[\lambda]$, а операция вариационного дифференцирования определяется соотношением

$$\frac{\delta F[z]}{\delta z(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta F[z]}{\int\limits_{\Delta t} \delta z(\tau) d\tau}, \tag{10.138}$$

где δF — вариация функционала $F(z)$.

Если процесс гауссов, все кумулянты, кроме второй, равны нулю, $K_2(t_1, t_2) = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle$ и формула (10.136) при $t' < t$ имеет вид

$$\langle z(t') R[z(\tau)] \rangle = \int\limits_0^t \langle z(t') z(\tau) \rangle \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau)} \right\rangle d\tau. \tag{10.139}$$

Формулу (10.139) называют соотношением Фуруцу — Новикова.

Если процесс $z(\tau)$ гауссов и, кроме того, дельта-коррелирован, то $\langle z(t_1) z(t_2) \rangle = B(t_1) \delta(t_1 - t_2)$ и

$$\langle z(t') R[z(\tau)] \rangle = \begin{cases} B(t') \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(t')} \right\rangle, & 0 < t' < t, \\ \frac{1}{2} B(t) \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(t)} \right\rangle, & t' = t. \end{cases} \tag{10.140}$$

Для многомерных гауссовых процессов формула Фуруцу — Новикова имеет вид

$$\langle z_i(\vec{r}) R[z] \rangle = \int \langle z_i(\vec{r}) z_j(\vec{r}) \rangle \left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z_j(\vec{r}')} \right\rangle d\vec{r}'. \tag{10.141}$$

Здесь $\vec{r}$ — вектор непрерывных аргументов; i и j — индексные аргументы; по повторяющимся индексным аргументам в правой части проводится суммирование.

Располагая способом расщепления корреляций, вернемся теперь к стохастическому уравнению переноса, начав рассмотрение с линейного одномерного случая. Итак,

$$\begin{gathered} m \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} = 0, \\ c(x, 0) = c_0(x), \end{gathered} \tag{10.142}$$

где m — неслучайная и постоянная пористость; $c(x, t)$ — случайная концентрация; $v(t)$ — случайная скорость фильтрации; $c_0(x)$ — неслучайная функция.

Введем функцию $\varphi_{t, x}(c)$, параметрически зависящую от t и x

$$\varphi_{t, x}(c) = \delta[c(x, t) - c]. \tag{10.143}$$

Искомая плотность вероятности $P_{t, x}(c)$ имеет вид

$$P_{t, x}(c) = \langle \varphi_{t, x}(c) \rangle = \langle \delta[c(x, t) - c] \rangle. \tag{10.144}$$

Чтобы получить уравнение для $P_{t, x}(c)$, найдем сначала уравнение для $\varphi_{t, x}(c)$, которое обычно называется уравнением Лиувилля, а затем усредним его. Дифференцируя (10.143) по x, запишем

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta[c(x, t) - c] = \delta_c'[c(x, t) - c] \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{c(x, t)}{\partial x}\right]\delta[c(x, t) - c]. \qquad (10.145)$$

Дифференцируя (10.143) по t, найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial c}\delta[c(x, t) - c]\frac{\partial c(x, t)}{\partial t}. \qquad (10.146)$$

Подставив в (10.146) выражение $\partial c/\partial t$, определенное из исходного уравнения (10.142), получим

$$\frac{\partial \varphi(c)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial c}\delta[c(x, t) - c]\left[\frac{v(t)}{m}\frac{\partial c(x, t)}{\partial x}\right] =$$

$$= \frac{v(t)}{m}\frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial c(x, t)}{\partial x}\delta[c(x, t) - c]. \qquad (10.147)$$

Сравнив (10.147) с (10.145), получим уравнение Лиувилля

$$m\frac{\partial \varphi_{t,x}(c)}{\partial t} + v(t)\frac{\partial \varphi_{t,x}(c)}{\partial x} = 0, \qquad (10.148)$$

которое, как легко убедиться, имеет тот же вид, что и исходное стохастическое уравнение. Начальное условие для уравнения Лиувилля, очевидно, запишется так

$$\varphi_{0,x}(c) = \delta[c_0(x) - c]. \qquad (10.149)$$

Представив $v(t)$ в виде $v(t) = v_0 + v'(t)$, $v_0 = \langle v \rangle$ и осреднив уравнения (10.148) и (10.149), получим

$$m\frac{\partial P(c)}{\partial t} + v_0\frac{\partial P(c)}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\langle v'(t)\,\delta[c(x, t) - c]\rangle,$$

$$P(c)|_{t=0} = \delta[c_0(x) - c]. \qquad (10.150)$$

Теперь остается вычислить в правой части (10.150) корреляцию флуктуации скорости $v'(t)$ с функционалом $\partial\varphi/\partial x$, также зависящим через решение $c(x, t)$ от $v'(t)$. Предполагая, что процесс $v'(t)$ является гауссовым и воспользовавшись формулой Фурутцу — Новикова, найдем

$$m\frac{\partial P(c)}{\partial t} + v_0\frac{\partial P(c)}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t\int\langle v'(t)\,v'(\tau)\rangle\left\langle\frac{\delta}{\delta v'(\tau)}\delta[c(x', t) - c]\right\rangle dx'd\tau. \qquad (10.151)$$

Пусть процесс $v'(t)$ является дельта-коррелированным. Тогда $\langle v'(t)\,v'(\tau) = \Delta B(t)\,\delta(t - \tau)$, и следовательно, (10.151) переходит в уравнение

$$m\frac{\partial P(c)}{\partial t} + v_0\frac{\partial P(c)}{\partial x} = -B(t)\,\Delta\frac{\partial}{\partial x}\int\left\langle\frac{\delta}{\delta v'(t)}\delta[c(x' t) - c]\right\rangle dx'. \qquad (10.152)$$

Учитывая теперь, что согласно (10.148)

$$\frac{\delta\varphi_{t,x}(c)}{\delta v'(t)} = -\frac{1}{m}\,\delta(x-x')\,\frac{\partial}{\partial x}\,\varphi_{t,x}(c), \tag{10.153}$$

имеем окончательно

$$m\,\frac{\partial P_{t,x}(c)}{\partial c} + v_0\,\frac{\partial P_{t,x}(c)}{\partial x} = \frac{B(t)\,\Delta}{m}\,\frac{\partial^2 P_{t,x}(c)}{\partial x^2},$$

$$P_{t,x}(c)|_{t=0} = \delta[c_0(x) - c]. \tag{10.154}$$

Таким образом, если процесс $v(t)$ является гауссовым и дельта-коррелированным, плотность вероятности концентрации, параметрически зависящая от x и t, удовлетворяет уравнению теплопроводности с конвективным членом. Из (10.154) следует, что средняя концентрация

$$u = \int cP(c)\,dc \tag{10.155}$$

удовлетворяет такому же уравнению

$$m\,\frac{\partial u}{\partial t} + v_0\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{B(t)\,\Delta}{m}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10.156}$$

с дополнительным условием $u(x, 0) = c_0(x)$.

Имеет смысл заметить, что уравнения для плотности вероятности (10.154) и средней концентрации (10.156) являются параболическими и, следовательно, возмущения плотности и средней концентрации распространяются с бесконечной скоростью. Это становится понятным, если учесть, что при выводе данных уравнений мы предполагали, что процесс $v(t)$ является гауссовым и дельта-коррелированным и, следовательно, скорости переноса могут быть неограниченными по величине.

Легко убедиться, что точное уравнение (10.156) и уравнение (10.18), полученные методом возмущений при условии дельта-коррелированности скорости, полностью совпадают, что конечно является важным доводом, свидетельствующим об эффективности метода возмущений.

Как показано в [13], рассмотрение дисперсии нейтральной примеси в случае нескольких пространственных переменных также позволяет получить уравнение для плотности вероятности, подобное (10.156). При этом расщепление корреляций и локализация уравнения достижимы при условии, что поле скорости является гауссовым в пространстве всех переменных и дельта-коррелированным по времени. Очевидно, последнее требование, естественное для задач дисперсии в турбулентных потоках, в нашем случае неприемлемо, поскольку в фильтрационных задачах стохастичность порождена независимой от времени гетерогенностью пористой среды.

При выводе уравнения (10.156) для средней концентрации было использовано уравнение (10.154) для плотности вероятности концентрации, полученное при достаточно ограничительных условиях гауссовости и дельта-коррелированности случайной скорости $v(t)$.

Следуя [13], покажем, что уравнение для средней концентрации можно получить, используя только гауссовость $v(t)$, если подвергнуть усреднению непосредственно стохастическое уравнение переноса (10.142) или несколько более общее уравнение переноса с диффузией

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+v(t)\frac{\partial c}{\partial x}=\varkappa\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \tag{10.157}$$

где $\varkappa$ — неслучайный постоянный коэффициент диффузии.

Усреднив (10.157), получим уравнение

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+v_0\frac{\partial u}{\partial x}=\varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\langle v'(t)\frac{\partial c}{\partial x}\rangle. \tag{10.158}$$

Теперь, считая, что $v'(t)$ — гауссов процесс с корреляционной функцией $B(\tau)$ и использовав формулу Фурутцу — Новикова (10.139), запишем

$$\langle v'(t)\,c(x,t)\rangle=\int B(t-\tau)\left\langle\frac{\delta c(x,t)}{\delta v'(\tau)}\right\rangle d\tau. \tag{10.159}$$

Учитывая, что решение исходного стохастического уравнения (10.157) можно представить в виде

$$c(x,t)=\psi\left[x-\frac{1}{m}\int_0^t v(\tau)\,d\tau,\ t\right], \tag{10.160}$$

вариационную производную из (10.159) запишем так

$$\frac{\delta c(x,t)}{\delta v'(\tau)}=\frac{\delta}{\delta v'(\tau)}\psi\left[x-\frac{v_0 t}{m}-\frac{1}{m}\int_0^t v'(\tau)\,d\tau,\ t\right]=-\frac{h(t-\tau)}{m}\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{10.161}$$

$$h(t-\tau)=\begin{cases}1, & t>\tau,\\ 0, & t<\tau.\end{cases}$$

Подставив (10.161) и (10.159) в (10.158), получим

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+v_0\frac{\partial u}{\partial x}=\left[\varkappa+\frac{1}{m}\int_0^t B(\tau)\,d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{10.162}$$

Таким образом, в эффективный коэффициент дисперсии

$$\varkappa_*=\varkappa+\frac{1}{m}\int_0^t B(\tau)\,d\tau \tag{10.163}$$

аддитивно входят коэффициент «молекулярной» диффузии $\varkappa$ и зависящий от времени коэффициент фильтрационной дисперсии

$$\frac{1}{m}\int_0^t B(\tau)\,d\tau.$$

Очевидно, что если $v'(t)$ — дельта-коррелированный процесс, а $\varkappa=0$, формула (10.163) переходит в (10.156). Определим время корреляции процесса $v'(t)$ по формуле

$$\Delta=\frac{1}{B(0)}\int_0^\infty B(\tau)\,d\tau. \tag{10.164}$$

Тогда при $t \gg \Delta$ уравнение для средней концентрации имеет вид

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\varkappa + \frac{B(0)\Delta}{m} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (10.165)$$

Естественно, что при $t \ll \Delta$ фильтрационная дисперсия несущественна, доминирует «молекулярная диффузия». Напротив, в другом предельном случае бесконечного времени корреляции, например при $B(\tau) = B(0)$, из (10.163) имеем

$$\varkappa_* = \varkappa + \frac{tB(0)}{m} \qquad (10.166)$$

и, следовательно, при достаточно больших t фильтрационная дисперсия будет определяющей в механизме рассеяния примеси.

Последний результат, кстати, точный при предположении гауссовости скорости, имеет смысл сравнить с локализованным уравнением (10.18), полученным методом возмущений. Положив для этого в (10.166) и (10.162) параметр $\varkappa = 0$, приходим к выводу, что локализованное уравнение является достаточно грубым приближением в случае больших времен корреляции.

Интересно отметить, что в одномерной задаче механизмы фильтрационной дисперсии и молекулярной диффузии «действуют», т. е. входят в уравнения аддитивно, что не исключает их взаимного влияния, поскольку формально решение задачи нелинейно зависит от эффективного коэффициента дисперсии $\varkappa_*$. В случае неодномерного течения взаимодействие упомянутых механизмов представляется более сложным. Рассмотрим достаточно нерегулярную по проницаемости среду. Поле скоростей фильтрации в такой среде «разбалтывает» поле концентрации примеси или насыщенности, делая его нерегулярным. С другой стороны, диффузионный процесс или капиллярные силы (во втором случае) стремятся сгладить, размазать «языки». Очевидно, чем более нерегулярна среда и, следовательно, поле скоростей, тем больше возможностей для проявления диссипативных процессов (диффузии или капиллярности). Можно считать, что фильтрационная дисперсия усиливает проявления диссипативного процесса. С другой стороны, диффузионный или капиллярный механизм ослабляет процесс фильтрационной дисперсии, «стаскивая» примесь или соответствующую жидкую фазу с наиболее быстрых траекторий, т. е. в определенной степени препятствуя росту языков.

Метод функционалов дает возможность рассмотреть и случай дисперсии активной примеси, приводящий к квазилинейному и даже нелинейному стохастическому уравнению переноса. Для этого, например, в случае квазилинейного уравнения переноса записывается уравнение Лиувилля для совместной плотности концентрации и градиента концентрации. Это уравнение хотя и является линейным относительно плотности, но в отличие от случая дисперсии нейтральной примеси отличается по виду от исходного стохастического уравнения, поскольку содержит не только производные плотности, но также и саму плотность. Однако и в этом случае

усреднение уравнения Лиувилля приводит к дифференциальному уравнению относительно плотности вероятности, если флуктуирующие поля гауссовы по всем переменным и дельта-коррелированны по времени. В некоторых случаях, используя особенности рассматриваемого квазилинейного уравнения переноса, удается получить замкнутое уравнение для средней концентрации активной примеси, усредняя непосредственно уравнение переноса. Примером такой задачи является усреднение уравнения Бюргерса [13]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c\frac{\partial c}{\partial x} + v(t)\frac{\partial c}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \qquad (10.167)$$

где x, v, t — безразмерные величины.

В предположении, что $v(t)$ является гауссовым процессом с нулевым средним и корреляционной функцией $B(\tau)$, получено замкнутое уравнение для $u(x, t) = \langle c(x, t)\rangle$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)^2\left[\int_0^t (t-\tau)\,B(\tau)\,d\tau\right]^n\right\} =$$

$$= \left[\nu + \int_0^t B(\tau)\,d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (10.168)$$

Замечательным обстоятельством является то, что помимо перенормировки диссипативного члена за счет появления дисперсионной вязкости заметно изменились по сравнению с уравнением Бюргерса (10.167) нелинейные члены. Они содержат квадраты производных всех порядков, начиная с первого, помноженных на степени свертки корреляционной функции и времени. Если эти свертки достаточно малы, рядом в (10.168) можно пренебречь и рассматривать приближение усредненного уравнения Бюргерса, которое получится, если усреднение провести при помощи метода возмущений, а затем полученное уравнение локализовать

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = [\nu + \varepsilon B(0)]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (10.169)$$

Здесь ε — безразмерное малое время корреляции.

Таким образом, метод функционального описания и аппарат вариационного дифференцирования позволяют в определенных модельных ситуациях построить точное дифференциальное уравнение для плотности вероятности концентрации примеси, а также точное уравнение для средней концентрации. К сожалению, условия применимости этих уравнений (гауссовость и дельта-коррелированность соответствующих полей) существенно ограничивают значимость этих результатов для непосредственного рассмотрения фильтрационной дисперсии. В то же время целесообразно использовать эти решения в качестве эталонов при оценке приближенных методов построения усредненных уравнений, например метода возмущений.

ДИСПЕРСИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ. УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ

До сих пор, рассматривая дисперсионные эффекты в фильтрационном потоке, мы предполагали, что примесь, переносимая течением, является динамически нейтральной. Это предположение позволило расщепить проблему, рассматривая отдельно стохастические свойства поля случайных скоростей фильтрации, а затем и дисперсию примеси, переносимой этим полем. Немаловажным обстоятельством, облегчающим исследование, в этом случае является линейность рассматриваемых уравнений фильтрации и переноса.

Далее, отказавшись от предположения о динамической нейтральности примеси, мы рассмотрим дисперсию неоднородных жидких систем в неоднородной пористой среде, используя для этого полную систему уравнений для скорости фильтрации суммарного потока, давления и насыщенности (концентрации). Поскольку свойства жидкости в общем случае зависят от реализуемого течения, а оно, в свою очередь, определяется характеристиками жидкости, полная система оказывается нелинейной. Для ее исследования и последующего усреднения применим метод возмущений в форме, несколько отличной от использовавшейся ранее.

Рассмотрим фильтрацию двух жидких несжимаемых фаз в среде с постоянной неслучайной пористостью и случайной проницаемостью. Для ее описания используем систему уравнений

$$\begin{cases} m\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\vec{v} f(\sigma)\right] = 0, \\ \vec{v} = -k(\vec{r})\, K(\sigma) \nabla p, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \end{cases} \tag{10.170}$$

где m — пористость; σ — насыщенность порового объема одной из жидкостей; $\vec{v}$ — суммарная скорость фильтрации; $f(\sigma)$ и $K(\sigma)$ — функции, вид которых определяется способностью жидких фаз смешиваться в пористой среде; эти функции выражаются через функции относительных фазовых проницаемостей и вязкости жидкостей $k(\vec{r})$ — абсолютная проницаемость; p — гидродинамическое давление; t — время.

Будем считать, что на границах области фильтрации заданы условия для p, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи, аналогично задана на границах и в начальный момент времени насыщенность σ.

Положим, что проницаемость k является случайным полем и представлена в виде $k = k_0 + \varepsilon k'$, где ε — неслучайный малый параметр, а $k_0 = \langle k \rangle$, где угловые скобки символизируют операцию усреднения по ансамблю.

Предполагая правомерность представлений

$$p = P + \varepsilon p', \ \vec{v} = \vec{W} + \varepsilon \vec{v}', \ \sigma = u + \varepsilon \sigma',$$
$$P = \langle p \rangle, \ \vec{W} = \langle \vec{v} \rangle, \ u = \langle \sigma \rangle, \tag{10.171}$$

где P, $\vec{W}$, u также зависят от ε. разложим $f(\sigma)$ и $K(\sigma)$ в ряд в окрестности u

$$f(\sigma) = \sum_{l=0}^{\infty} f^{l}(u)\,\varepsilon^{l}(\sigma')^{l}\frac{1}{l!},\quad K(\sigma) = \sum_{l=0}^{\infty} K^{(l)}(u)\,\varepsilon^{l}(\sigma')^{l}\frac{1}{l!} \tag{10.172}$$

Подставляя (10.171) и (10.172) в первое уравнение из (10.170), получим

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + m\varepsilon\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \operatorname{div}[\vec{W}f(u)] + \\ + \operatorname{div}\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^{l}\left[\frac{\vec{W}f^{(l)}(\sigma')^{l}}{l!} + \frac{\vec{v}'f^{(l-1)}(\sigma')^{l-1}}{(l-1)!}\right]\right\} = 0. \tag{10.173}$$

Усреднив (10.173), найдем уравнения для u и σ'

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}[\vec{W}f(u)] + \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^{l}\operatorname{div}\left[\frac{\vec{W}f^{(l)}<\sigma'^{l}>}{l!} + \right. \\ \left. + \frac{f^{(l-1)}\vec{v}'(\sigma')^{l-1}>}{(l-1)!}\right] = 0, \tag{10.174}$$

$$m\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^{l-1}\operatorname{div}\left[\frac{\vec{W}f^{(l)}}{l!}(\sigma'^{l} - <\sigma'^{l}>) + \frac{f^{l-1}}{(l-1)!}(\vec{v}'(\sigma')^{l-1} - \right. \\ \left. - <\vec{v}'\sigma'^{(l-1)}>)\right] = 0. \tag{10.175}$$

Уравнение (10.174) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}[\vec{W}f(u)] + \varepsilon^{2}\operatorname{div}\left[\frac{1}{2}\vec{W}f''(u)<\sigma'^{2}> + \right. \\ \left. + f'(u)<\vec{v}'\sigma'>\right] = 0. \tag{10.176}$$

В уравнении (10.175) для квадратичного приближения u следует удержать главные члены

$$m\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \operatorname{div}[\vec{W}f'(u)\sigma'] + \operatorname{div}[\vec{v}'f(u)] = 0. \tag{10.177}$$

Дополнительные детерминированные условия, наложенные на σ, отнесем к u, тогда соответствующие условия для σ' будут однородными.

Будем предполагать, что характерные временно́й и пространственные масштабы изменения u значительно больше аналогичных характеристик σ', что позволяет записать решение (10.177) в виде

$$\sigma'(\vec{x}, t) = -\frac{1}{m}\int_{0}\exp[-\vec{W}\nabla f'(u)(t-\tau]\operatorname{div}_{z}\{v'f(u)\}\,d\tau, \tag{10.178}$$

где индекс z означает, что в фигурных скобках аргументами являются τ и $z = \vec{x} - \vec{W} m^{-1} (t - \tau) f' (u)$.

Подставив (10.178) в (10.176) и предположив локальную статистическую однородность полей $\vec{W}$ и $\vec{v}$, получим

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W} \nabla f(u) = \frac{\varepsilon^2}{m} \int_0^t \sum_{ij}^n B^{ij} (\vec{x}, t, \vec{z}, \tau) \left[\varphi \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_i \partial z_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial f(u)}{\partial z_j} \right] d\tau + \frac{\varepsilon^2}{2m^2} \vec{W} \nabla f'' (u) \int_0^t \int_0^t \exp [-\vec{W} \nabla f' (u) (2t -$$

$$- \tau - \theta] \sum_{ij}^n B^{ij} (\vec{z}, \tau, \vec{\zeta}, \theta) \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial f}{\partial \zeta_j} d\tau d\theta, \qquad (10.179)$$

где B^{ij} — корреляционный тензор поля $\vec{v}$; n — размерность пространства;

$$\vec{\zeta} = \vec{x} - \vec{W} m^{-1} f' (u) (t - \theta);$$

$$\varphi (\vec{x}, t, \tau) = f'_u [u (\vec{x}, t)] \exp [-\vec{W} \nabla f' (u) (t - \tau)].$$

Для вычисления тензора B^{ij} используем (10.171) и (10.170). Для главной части $\vec{v}'$, p' получим систему

$$\vec{v}' = -K (u) [k' \nabla P + k_0 \nabla p' + K' (u) K^{-1} (u) k_0 \sigma' \nabla P], \quad \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \qquad (10.180)$$

в которую следует включить также уравнение (10.178).

Введем в рассмотрение невозмущенные по σ поля давления p'_* и скоростей $\vec{v}'_*$, определяемые уравнением

$$\vec{v}'_* = -K (u) (k' \nabla P + k_0 \nabla p'_*), \quad \operatorname{div} \vec{v}'_* = 0. \qquad (10.181)$$

Тогда

$$\nabla^2 (p' - p'_*) = -K' (u) K^{-1} (u) \operatorname{div} (\sigma' \nabla P), \qquad (10.182)$$

$$p' - p'_* = K' (u) K^{-1} (u) \int G \operatorname{div}_1 (\sigma' \nabla P) d\omega_1, \qquad (10.183)$$

где G — функция Грина уравнения Лапласа в неограниченном пространстве; $d\omega_1$ — элемент объема пространства.

Подставляя (10.183) в (10.180) и вводя эффективную проницаемость невозмущенного по σ' течения k^* при помощи соотношения $\vec{W} = -k^* K (u) \nabla P$, получим для $\vec{v}'$ интегро-дифференциальное уравнение

$$\vec{v}' = \vec{v}'_* + \frac{k_0 K' (u)}{m k^* K (u)} \left\{ \vec{W} \int_0^t \exp [-\vec{W} \nabla f' (u) (t - \tau)] \operatorname{div} [\vec{v}' f (u)] d\tau + \right.$$

$$+\int \nabla G \operatorname{div}_1 [\vec{W} \int_0^t \exp[-\vec{W} \nabla f'(u)(t-\tau)] \operatorname{div}_2 [\vec{v'} f(u)] \times$$

$$\times d\tau] d\omega_1\}. \qquad (10.184)$$

Его решение в виде ряда по параметру $\lambda = k_0 K'(u)/mk^* K(u)$ в линейном приближении записывается следующим образом:

$$\vec{v'} = \vec{v'_*} + \lambda \left\{ \vec{W} \int_0^t \exp[-\vec{W'} \nabla f'(u)(t-\tau)] \operatorname{div} [\vec{V'_*} f(u)] d\tau + \right.$$

$$\left. + \int \nabla G \operatorname{div}_1 \left[\vec{W} \int_0^t \exp[-\vec{W} \nabla f'(u)(t-\tau)] \operatorname{div}_2 [\vec{V'_*} f(u)] d\tau \right] d\omega_1 \right.$$

(10.185)

Отсюда для линейного по λ приближения корреляционного тензора B^{ij} получим

$$B^{ij} = B^{ij}_* + \lambda \{ W_i \int_0^t \exp[-\vec{W} \nabla f'(u)(t-\tau)] B^{jt}_* \frac{\partial f(u)}{\partial z_t} d\tau +$$

$$+ W_i \int_0^t \exp[-\vec{W} \nabla f'(u)(t-\tau)] B^{it} \frac{\partial f(u)}{\partial z_t} d\tau +$$

$$+ \int \frac{\partial G}{\partial x_i} \operatorname{div}_1 \left[\vec{W} \int_0^t \exp[-\vec{W} \nabla f'(t-\tau)] B^{jt}_* \frac{\partial f(u)}{\partial z_t} d\tau \right] d\omega_1 +$$

$$+ \int \frac{\partial G}{\partial x_j} \operatorname{div}_1 \left[\vec{W} \int_0^t \exp[-\vec{W} \nabla f'(u)(t-\tau)] B^{it}_* \frac{\partial f(u)}{\partial z_t} d\tau \right] d\omega_1 \Big\}.$$

(10.186)

Таким образом, в рамках нетривиального приближения метода возмущений по параметрам ε и λ средняя насыщенность удовлетворяет нелокальному функциональному уравнению (10.179), параметры которого можно выразить через параметры невозмущенной задачи и моменты заданного случайного поля k. Вычисление компонент тензора B^{ij}_* при $\tau = 0$ и $n = 2,3$ для неограниченной области проведено в главе 5. Для уравнения (10.179) можно поставить задачу Коши с условиями, определенными для функции σ.

Очевидно, учет поправки порядка λ в корреляционном тензоре (10.186) имеет смысл лишь в том случае, когда $\lambda \gg \varepsilon$. В противном случае вклад этой поправки сопоставим с членами более высокого порядка по ε, игнорируемыми в рассматриваемом приближении.

Естественно ожидать, что в случае мелкомасштабной по пространству неоднородности пористой среды уравнение для средней насыщенности можно локализовать. Пусть, например, временной масштаб $\Delta = \delta m / |\vec{W}| f'(u)|^{-1} \ll t$ (здесь δ — пространственный масштаб неоднородности) и тензор B_* локализован следующим образом

$$B^{ij}_* = \overline{B}^{ij} \Delta\delta(\tau - 0), \quad \overline{B}_* = B_*(\tau = 0).$$

Тогда из (10.186) следует, что в общем случае с точностью до малых порядка Δ тензор B остается нелокальным, не локализуется и уравнение (10.179). Однако в некоторых частных, но достаточно интересных случаях уравнение (10.179) можно локализовать. Рассмотрим эти случаи.

1. Фильтрация взаиморастворимых жидкостей. В этом случае $f(u) = u$, $K(u) = \mu^{-1}(u)$, где μ — вязкость смеси. Очевидно, если $\mu(u) = \text{const}$, поле скоростей не зависит от насыщенности (одностороннее взаимодействие) и из (10.179) и (10.186) следует

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W}\nabla u = \frac{\Delta\varepsilon^2}{m}\bar{B}^{ij}_{\cdot\cdot}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{10.187}$$

т. е. флуктуации поля скоростей на неоднородностях пористой среды приводят к дисперсии насыщенности.

При $\mu(u) \neq \text{const}$ имеет место двустороннее взаимодействие и из (10.179) вытекает уравнение

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W}\nabla u = \frac{\varepsilon^2}{m}\int_0^t B^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial z_j}d\tau. \tag{10.188}$$

Если при рассмотрении интегралов по пространству в (10.186) пренебречь вкладом неизотропной части $\operatorname{div}[\vec{V}f(u)]$, входящих в них, то из (10.186) следует

$$B^{ij} = B^{ij}_{\cdot\cdot} + \frac{\lambda(n-1)}{n}\int_0^t \left(W_i B^{ij}_{\cdot\cdot} + W_j B^{ij}_{\cdot\cdot}\right)\frac{\partial u}{\partial z_i}d\tau. \tag{10.189}$$

Если тензор $B^{ij}_{\cdot\cdot}$ локализован на масштабе Δ

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W}\nabla u = \frac{\varepsilon^2\Delta}{m}B^{ij}_{\cdot\cdot}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2\Delta(n-1)}{n}\int_0^t \left(W_i B^{ij}_{\cdot\cdot} + W_j B^{ij}_{\cdot\cdot}\right)\frac{\partial u}{\partial z_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial z_j}d\tau. \tag{10.190}$$

Однако взаимодействие полей в этом случае не настолько сильно, чтобы не допустить локализации. Последняя достигается при помощи повышения порядка дифференциального уравнения. Действительно, подынтегральная функция в (10.190) зависит от t, поскольку от t зависит вектор $\vec{z}$. Поэтому дифференцирование по t с точностью до множителя совпадает с дифференцированием по x_k. Это позволяет исключить из (10.179) интеграл и получить уравнение

$$\left(n\frac{\partial}{\partial t} - \vec{W}\Delta\right)\left(m\frac{\partial}{\partial t} + \vec{W}\nabla - \frac{\Delta\varepsilon^2}{m}B^{ij}_{\cdot\cdot}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)u = nC_l^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$C_l^{ij} = \frac{\Delta\varepsilon^2(n-1)k_0}{nm^2 k_*}\ln\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(W_i\bar{B}^{ij}_{\cdot\cdot} + W_j\bar{B}^{ij}_{\cdot\cdot}\right). \tag{10.191}$$

При этом относительная простота уравнения (10.191) объясняется тем, что для вязкости использована формула Кендалла

$$\ln \mu = u \ln \mu_1 + (1 - u) \ln \mu_2,$$

где μ_1, μ_2 — вязкости компонентов смеси.

Уравнение (10.191) имеет второй порядок по t и третий по x. Для постановки задачи Коши для него следует из (10.190) найти $\partial u/\partial t$, положив $t=0$.

2. Фильтрация несмешивающихся жидкостей. В этом случае

$$K(u) = \frac{k_1(u)}{\mu_1} + \frac{k_2(u)}{\mu_2}, \quad f(u) = \frac{k_1(u)}{\mu_1} K^{-1}(u),$$

где k_1, k_2 — относительные фазовые проницаемости.

Локализация в общем случае невозможна. Однако при $\mu_1/\mu_2 \sim 1$ функция $K(u)$ мало зависит от u (почти одностороннее взаимодействие). Если, кроме того, в некотором интервале насыщенностей можно пренебречь кривизной $f(u)$, то из (10.179) следует

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{W} \nabla f = \frac{\Delta \varepsilon^2 f'(u)}{m} \overline{B}^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (10.192)$$

Нетрудно убедиться, что основное уравнение (10.179), как и исходная система (10.170), инвариантно к обращению поля скоростей и времени $(\vec{W}, t) \rightleftarrows (-\vec{W}, -t)$. Варианты этого уравнения, локализованные полностью или частично, такими свойствами не обладают.

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ. УЧЕТ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Как известно, традиционная теория фильтрации несмешивающихся жидкостей Маскета — Леверетта [44] содержит в своей основе гипотезу о том, что в процессе движения распределение жидких фаз в малом элементе пористой среды, считающемся с позиций механики сплошной среды «точкой», равновесно. Точнее говоря, предполагается, что время установления локального равновесия значительно меньше характерного времени, определяемого существенными изменениями параметров описываемого макропроцесса. При этом задание насыщенности и некоторых достаточно устойчивых распределений линейных размеров пустотного пространства позволяет описать распределение фаз в элементе. Очевидно, для того чтобы гипотеза была приемлемой, необходимо некоторое сочетание условий: малость элемента, достаточная интенсивность процесса установления равновесия, обычно лимитируемого капиллярными и гравитационными силами, малая скорость внешнего макроскопического процесса, например малая скорость вытеснения. Естественно, что любое существенное отклонение от этих условий приводит к тем или иным противоречиям и требует специального рассмотрения. В этой связи уместно отметить появление в послед-

нее время работ, содержащих попытки построения теории фильтрации, учитывающей эффекты неравновесности, например [2].

Наш дальнейший анализ будет основан на гипотезе о равновесном распределении фаз в достаточно малом объеме и поисках следствий, вытекающих из рассмотрения усредненных уравнений. В этом случае «малый» элемент для усредненных уравнений будет содержать много разных элементов первого уровня, иметь свою внутреннюю макроскопическую структуру и описывающие ее параметры. Естественно, что для элемента второго порядка, много большего, чем первый, гипотеза о равновесном распределении фаз может быть неприемлемой. В какой степени это существенно, должен дать ответ анализ усредненных уравнений.

Итак, рассмотрим фильтрацию двух несжимаемых и несмешивающихся жидкостей в неоднородной пористой среде. Пусть σ — насыщенность одной из фаз, для определенности первой $\vec{v}_i$, p_i, μ_i — скорость фильтрации, давление и вязкость i-й фазы соответственно, $f_i(\sigma)$ — функции относительных фазовых проницаемостей. $J(\sigma)$ — функция Леверетта, α — межфазное натяжение. Полная система уравнений Маскета-Леверетта без учета гравитации имеет вид

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\nabla\vec{v_1}=0,\quad -m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\nabla\vec{v_2}=0,$$

$$\vec{v}_i=-\frac{kf_i(\sigma)}{\mu_i}\nabla p_i,\quad p_2-p_1=\alpha\sqrt{\frac{m}{k}}\,J(\sigma). \tag{10.193}$$

Введя в рассмотрение суммарную скорость фильтрации

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2, \tag{10.194}$$

систему (10.193) представим в форме

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\nabla\left\{F(\sigma)\vec{v}+\frac{\alpha k}{\mu_2}f_2F\nabla\left[\sqrt{\frac{m}{k}}J(\sigma)\right]\right\}=0,$$

$$\operatorname{div}\vec{v}=0, \tag{10.195}$$

$$\vec{v}=-\frac{k}{\mu_1}K(\sigma)\nabla p_1-\frac{\alpha k f_2}{\mu_2}\nabla\left[\sqrt{\frac{m}{k}}J(\sigma)\right]\ldots$$

Здесь

$$F(\sigma)=f_1(\sigma)/K(\sigma),\quad K(\sigma)=f_1(\sigma)+\mu f_2(\sigma),$$
$$\mu=\mu_1/\mu_2.$$

Выбрав масштабы суммарной скорости V_0, длины L, проницаемости k_0 и пористости m_0, введя новые независимые переменные

$$\zeta_i=x_i/L,\quad \tau=tV_0/Lm_0 \tag{10.196}$$

и новые искомые и заданные функции

$$p=p_1k_0/LV_0\mu_1,\quad \vec{V}=\vec{v}/V_0,$$
$$\bar{k}=k/k_0,\quad \bar{m}=m/m_0, \tag{10.197}$$

обезразмерив систему (10.195), получим

$$\bar{m}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla\left\{F(\sigma)\vec{V} + \mu\beta_1\bar{k}f_2 F \nabla\left[\sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}}J(\sigma)\right]\right\} = 0,$$

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0 \qquad (10.198)$$

$$\vec{V} = -\bar{k}K(\sigma)\nabla p - \mu\beta_1\bar{k}f_2\nabla\left[\sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}}J(\sigma)\right],$$

где параметр β_1 имеет вид

$$\beta_1 = a\sqrt{k_0 m_0}/(\mu_1 V_0 L). \qquad (10.199)$$

Как показывают подсчеты, для довольно широкого диапазона реальных условий параметр β_1 может считаться малым. Будем считать поля $k(r)$ и $m(r)$ стохастически однородными и их средние значения выберем в качестве масштабов $m_0 = <m>$, $k_0 = <k>$. Представим поля $\bar{k}$ и $\bar{m}$ в виде

$$\bar{k} = 1 + \beta_2 k', \quad \bar{m} = 1 + \beta_2 m', \qquad (10.200)$$

где параметр β_2 считается малым, а для функций k' и m' выполняется условие $<k'> = <m'> = 0$, и будем искать решение системы (10.198) в виде ряда по степеням параметров β_1 и β_2.

$$\sigma = u + \beta_1\sigma' + \beta_2\sigma'' + \ldots; \quad p = P + \beta_1 p' + \beta_2 p'' + \ldots$$

$$\vec{V} = \vec{\bar{V}} + \beta_1\vec{V'} + \beta_2\vec{V''} + \ldots \qquad (10.201)$$

Аналогично представляются и функции $F(\sigma)$ и $K(\sigma)$:

$$F(\sigma) = F(u) + F'(u)(\beta_1\sigma' + \beta_2\sigma'') + \ldots$$

$$K(\sigma) = K(u) + K'(u)(\beta_1\sigma' + \beta_2\sigma'') + \ldots \qquad (10.202)$$

Здесь

$$u = <\sigma>, \quad P = <p>, \quad \vec{\bar{V}} = <\vec{V}>, \quad <\sigma'> = <\sigma''> = \ldots = 0$$

$$<p'> = <p''> = \ldots = 0, \quad <\vec{V'}> = <\vec{V''}> = \ldots = 0.$$

Подставим (10.201) и (10.202) в систему (10.198) и усредним полученные уравнения, сохранив в них наряду с главными членами поправки, имеющие порядок β_1 и β_2^2. Такой выбор формы возмущенной задачи объясняется тем, что параметр β_1 присутствует в невозмущенной задаче, а β_2^2 — характеристика неоднородности полей пористости и проницаемости. Итак, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\{F(u)\vec{\bar{V}} + \mu\beta_1 f_2(u)\nabla F(u) J(\sigma)\} = -\beta_2^2\nabla <[F'(u)\sigma''V'']>$$

$$\operatorname{div}\vec{\bar{V}} = 0 \qquad (10.203)$$

$$\vec{\bar{V}} = -k^* K(u)\nabla P - \mu\beta_1 f_2(u)\nabla J(u).$$

Здесь k^* — эффективная проницаемость среды при фильтрации однородной жидкости и, кроме того, принято условие $K'(u) \ll 1$, обычно выполняющееся при $\mu \sim 1$.

Для замыкания системы (10.203) необходимо выписать систему уравнений для σ'' и V'', а также вычислить k^*. Нетрудно заметить, что в рассматриваемом приближении искомая система соответствует системе для флуктуаций насыщенности и скорости исходной модели (10.198) при $\beta_1=0$, т. е. случаю, уже рассмотренному ранее. Использовав это, первое уравнение из (10.203) запишем в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\left[F(u)\vec{V}\right]=\nabla\left\{\zeta^2\Delta\left|\vec{V}\right|b\nabla F(u)-\right.$$
$$\left.-\mu\beta_1 f_2(u)F(u)\nabla J(u)\right\}, \qquad (10.204)$$

где тензор b_{ij} определен равенствами (10.125) и (10.126), а Δ — обезразмеренный по L пространственный масштаб корреляции поля проницаемости. Кроме того, кривизна $F=F(u)$ считается малой. Таким образом, в рассматриваемом приближении в усредненных уравнениях сохранен капиллярный механизм, учтена фильтрационная дисперсия на неоднородностях поля проницаемости, как обычно приводящая к дополнительной диссипации, зависящей от модуля скорости фильтрации, коэффициента вариации проницаемости, пространственного масштаба корреляции проницаемости. Напомним, что в пятом разделе данной главы была рассмотрена одномерная задача о дисперсии и диффузии и приведено ее точное решение, также давшее аддитивность диссипативных членов в уравнениях переноса.

Наличие в правой части (10.204) двух малых параметров предопределяет структуру решений и метод анализа — сращивание внешнего и внутреннего асимптотического разложений по параметру α, который естественно выбрать в виде

$$\alpha=\zeta^2\Delta\left|\vec{V}\right|b_{11}+\mu\beta_1. \qquad (10.205)$$

Применительно к подобной задаче этот метод подробно изложен в работе [2], где рассмотрен вопрос о стабилизированной зоне для процесса вытеснения при равновесной и неравновесной фильтрации. Опуская промежуточные выкладки, связанные с введением «быстрого» времени и соответствующей системы координат, связанной с поступательно движущейся стабилизированной зоной, приведем окончательное выражение для безразмерного расстояния между двумя насыщенностями $u+\delta$ и $u-\delta$ в стабилизированной зоне

$$h=\zeta^2\Delta b_{11}\psi_1+\mu\beta_1 V^{-1}\psi_2, \qquad (10.206)$$

$$\Psi_1=\int_{u+\delta}^{u-\delta}\frac{F'(u)\,du}{\lambda(u)},\quad \Psi_2=\int_{u+\delta}^{u-\delta}\frac{F(u)f_2(u)f'(u)\,du}{\lambda(u)},$$

$$\lambda(u)=\left[F(u_1)-F(u_2)\right]\frac{u_2-u}{u_1-u_2}+F(u)-F(u_2).$$

Легко видеть, что при игнорировании капиллярного давления или при достаточно больших скоростях длина стабилизированной зоны не зависит от скорости и стремится к некоторой величине

$h_0 = \zeta^2 \Delta b_{||} \Psi_{|}$, тем большей, чем сильнее и крупномасштабнее неоднородность пористой среды по проницаемости. Существенно, что порядки длины стабилизированной зоны и масштаба корреляции одинаковы.

Таким образом, учет фильтрационной дисперсии при макроописании снимает одно из противоречий теории равновесной фильтрации — неограниченное возрастание градиента насыщенности при возрастании скорости вытеснения. В рассмотренном варианте этот градиент ограничен, поскольку длина стабилизированной зоны при больших скоростях остается конечной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алишаев М. Г.* О стационарной фильтрации с начальным градиентом. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник ВНИИ. М., Недра, 1968, с. 202—211.
2. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., Недра, 1972.
3. *Беран М. Дж.* Применение статистических теорий для определения тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов.— В кн.: Механика композиционных материалов, т. 2, М., Мир, 1978, с. 242—286.
4. *Бердичевский А. Л.* Об эффективной теплопроводности сред с периодически расположенными включениями.— Докл. АН СССР, т. 247, 1979, № 6, с. 1363—1367.
5. *Борисов Ю. П.* Учет неоднородности при проектировании разработки нефтяной залежи/ Тр. ВНИИ, 1959, вып. 21, с. 245—260.
6. *Вайнберг Я. М.* Статистические методы расчленения неоднородных объектов с использованием марковских условных вероятностей.— Геология и геофизика, 1982, № 7, с. 112—120.
7. *Гихман И. И. Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов М., Наука, 1965.
8. *Дыхне А. М.* О вычислении кинетических коэффициентов сред со случайными неоднородностями.— Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. 52, 1967, вып. 1, с. 264—266.
9. *Дыхне А. М.* Проводимость двумерной двухфазной системы.— Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. 59, 1970, вып. 1, с. 111—115.
10. *Ентов В. М., Фельдман А. Я., Чен Син Э.* Программное моделирование процесса капиллярного вытеснения в пористой среде.— Программирование, 1975, № 3, с. 68—73.
11. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов.— Успехи математических наук, т. 34,1979, вып. 5 (209), с. 65—133.
12. *Канаун С. К.* О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды.— Журнал прикладной механики и технической физики, 1977, № 2, с. 160—169.
13. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М., Наука, 1980.
14. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972.
15. *Крылов А. П.* Проектирование разработки нефтяных месторождений. М., Гостоптехиздат, 1962.
16. *Кудинов В. А., Мойжес Б. Я.* Эффективная проводимость неоднородной среды. Итерационный ряд и вариационные оценки для метода Херринга.— Журнал технической физики, т. 49, 1979, вып. 8, с. 1595—1603.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Наука, 1982.
18. *Лионс Ж.-Л.* Замечания по некоторым вычислительным аспектам метода гомогенизации в композитных материалах.— В кн.: Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. Новосибирск, Наука, 1978, с. 5—19.
19. *Лифшиц И. М., Ровенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов.— Журнал экспериментальной и теоретической физики, т 16, 1946, № 11, с. 967—980.
20. *Лурье К. А., Черкаев В. А.* Точные оценки проводимости смесей, образованных двумя материалами, взятыми в заданной пропорции, (плоская задача).— Докл. АН СССР, т. 264, 1982, N 5, с. 1182—1230
21. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Часть 1, 1965, часть 2, 1967. М., Наука.
22. *Найфэ А.* Методы возмущений. М., Мир, 1976.
23. *Николаевский В. Н.* Конвективная диффузия в пористых средах.— Прикладная математика и механика, т. 23, 1959, вып. 6, с. 1042—1050.

24. *Николаевский В. Н.* Механика насыщенных пористых сред. М., Недра, 1970.
25. *Оделевский В. И.* Расчет обобщенной проводимости гетерогенных систем.— Журнал технической физики, т. XXI, 1951, вып. 6, с. 667—685.
26. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977
27. *Развитие* исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967 гг.). Под ред. акад. П. Я. Полубариновой-Кочиной. М., Наука, 1969.
28. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М., Наука, 1978.
29. *Саттаров М. М.* Определение дебитов скважин, эксплуатирующих неоднородный пласт.— Изв. ВУЗов, сер. Нефть и газ, 1960, № 3, с. 67—72.
30. *Скворцов В. В.* Математический эксперимент в теории разработки нефтяных месторождений. М., Наука, 1970.
31. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., Наука, 1967
32. *Теория* и свойства неупорядоченных материалов. М., Мир, 1977.
33. *Фокин Г. А.* Метод перенормировок в случае неограниченной среды в отсутствие внешних сил.— Прикладная математика и механика, т. 41, 1977, вып. 6, с. 1095—1098.
34. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика, М., Гостоптехиздат, 1963.
35. *Швидлер М. И.* Фильтрационные течения в неоднородных средах. М., Гостоптехиздат, 1963.
36. *Швидлер М. И.* Статистическое моделирование фильтрационных процессов в неоднородных средах. Обзор.— Изв. ВУЗов, сер. Геология и разведка, 1983. № 5, с. 66—83.
37. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М., Наука, 1979.
38. *Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.* Электронные свойства легированных полупроводников, М., Наука, 1979.
39. *Bruggeman D. A. G.* Berechnung verschidener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen.— Annalen der Physik, 5, Folge, b. 24, 1935, ss. 637—664.
40. *Gradzinski., Kostecka A. Radomski A.* Sedimentologia. Wydamnictwa geologizne. Warsawa, 1976, Русск. перев. Седиментология. М., Недра, 1980.
41. *Hashin Z., Strikman S.* A variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials.— J. of Applied Physics, v. 33, 1962, № 10, pp. 3125—3131.
42. *Landauer R.* The Electrical Resistance of Binary Metallic Mixtures.— Journal of Applied Physics, v. 23, № 7, 1952, pp. 779—784.
43. *Lichtenecker K.* Die Dielektrizitätskonstante natürlicher und künstlicher mischkörper.— Physikalische Zeitschrift, b. XXVII, 1926, № 4,5, ss. 115—158.
44. *Muskat M.* The flow of homogeneous fluids through porous media. N.— J.— London, McGraw-Hill, 1937. Русск. перев. Течение однородных жидкостей в пористой среде. 1949, М., Гостоптехиздат.
45. *Matheron G.* Elements pour une theorie des milieux poreux. Paris, Masson et Cie, 1967.
46. *Prager S.* Diffusion and Viscous Flow in Concentrated Suspension.—Physica, v 29, 1963, p. 129—134.
47. *Saffman P. G.* A theory of dispersion in porous medium.— J. Fluid Mech., v. 6, 1959, № 3, pp. 321—349. Русск. перев. сб. Механика, № 2, М., ИЛ, 1960, с. 3—33.
48. *Sallé C., Debuser J.* Formation des Gisments de Petrole. Paris, Edition Techip, 1976. Русск перев. Салле К., Дебизер Ж. Формирование нефтяных залежей. М., Недра, 1978.
49. *Scheidegger A. E.* The Physics of Flow Through Porous Media. University of Toronto Press, 1957. Русск. перев. Шейдеггер А. Е. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.
50 *Sheidegger A. E.* On the theory of flow of miscible phases in porous media. Int. Ass. Scient. Hydrol. IUGG, General Assembly of Toronto, 1957, pp. 236—242.

ТАБЛИЦЫ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Здесь приведены результаты расчетов эффективной проводимости, выполненные при помощи ЭВМ в соответствии с алгоритмом, описанном в шестом разделе главы 6. Все вычисления проведены с точностью до 10^{-8}, в таблицах результаты округлены до четвертого знака после запятой.

Напомним, что при расчетах самосогласованной эффективной проводимости гетерогенной системы, содержащей включения, последние имитируются эллипсоидами (a_i — длина полуосей эллипсоидов).

В табл. 1—6 представлены результаты расчетов для случая, когда моделями включений служат бесконечные эллиптические цилиндры ($a_3 = \infty$), ориентированные вдоль третьей оси. При этом, очевидно, σ_3 — компонента тензора эффективной проводимости в системе координат, совмещенной с осями эллипсоидов — включений, имеет вид

$$\sigma_3 = < \sigma >$$

и в таблицах не приводится. Компоненты σ_1 и σ_2 даны в зависимости от ν — отношения проводимости включений и P — концентрации более проводящих включений, а также от a_2/a_1 — отношения полуосей эллиптического цилиндра в плоскости, перпендикулярной третьей оси.

В табл. 2, 4, 6 рассматривается случай, когда оси 1 и 2 эллиптических цилиндров ориентированы случайным образом и так, что распределения углов Эйлера этих осей равномерны. Для таких систем $\sigma_3 = < \sigma >$, а $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma^*$, т. е. в плоскости (1, 2) эффективная проводимость изотропна. Это обстоятельство подчеркивается в соответствующих таблицах указанием об усреднении по углам.

В таблицах, начиная с седьмой, включения имитируются эллипсоидами вращения, вытянутыми или сплюснутыми вдоль первой оси. Поэтому, естественно, $\sigma_2 = \sigma_3$. Если эллипсоиды — включения хаотически ориентированы в пространстве, то в табл. 8, 9, 12, 13, 15, 16, 19, 20 указано, что проведено дополнительное усреднение по углам Эйлера и приведено значение σ^* — эффективной проводимости такой изотропной системы.

ТАБЛИЦА 1

P	$a_2/a_1 = 1$	$a_2/a_1 = 0{,}2$		$a_2/a_1 = 0{,}1$		$a_2/a_1 = 0$	
	$\sigma_1 = \sigma_2$	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9188	0,9466	0,8358	0,9506	0,7889	0,9550	0,6895
0,90	0,8392	0,8924	0,7006	0,9006	0,6356	0,9100	0,5261
0 85	0,7614	0,8375	0,5900	0 8500	0,5226	0,8650	0,4253
0,80	0,6858	0,7820	0,5000	0,7991	0,4379	0,8200	0,3569
0,75	0,6131	0,7262	0,4270	0,7479	0,3730	0,7750	0,3075
0,70	0,5439	0,6704	0,3675	0,6967	0,3225	0,7300	0,2701
0,65	0 4788	0,6149	0,3191	0,6457	0,2824	0,6850	0,2408
0,60	0,4188	0,5603	0,2794	0,5950	0,2501	0,6400	0,2172
0,55	0,3644	0,5068	0,2468	0,5448	0,2237	0,5950	0,1979
0,50	0,3162	0,4550	0,2198	0,4954	0,2018	0,5500	0,1817
0,45	0,2744	0,4052	0,1973	0,4470	0,1835	0,5050	0,1679
0,40	0,2388	0,3579	0,1785	0,3999	0,1681	0,4600	0,1561
0,35	0,2088	0 3134	0,1626	0,3541	0,1549	0,4150	0,1459
0,30	0,1839	0,2721	0,1492	0,3101	0,1435	0,3700	0,1369
0,25	0,1631	0,2342	0,1377	0,2681	0,1337	0,3250	0,1289
0,20	0,1458	0,2000	0,1279	0,2284	0,1251	0,2800	0,1218
0,15	0,1314	0,1695	0,1194	0,1913	0,1176	0,2350	0,1155
0,10	0,1192	0,1472	0,1121	0,1573	0,1110	0,1900	0,1098
0,05	0,1088	0,1196	0,1056	0,1268	0,1052	0,1450	0,1046
0	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000

Примечание. $n = 2$, $\nu = 10^{-1}$.

ТАБЛИЦА 2

p	σ^*				
	$a_2/a_1 = 1$	$a_2/a_1 = 0.2$	$a_2/a_1 = 10^{-1}$	$a_2/a_1 = 10^{-2}$	$a_2/a_1 = 10^{-32}$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9188	0,8513	0,7986	0,7044	0,6912
0,90	0,8392	0,7233	0,6473	0,5406	0,5278
0,85	0,7614	0,6156	0,5352	0,4377	0,4268
0,80	0,6858	0,5267	0,4514	0,3675	0,3582
0,75	0,6131	0,4537	0,3876	0,3166	0,3086
0,70	0,5439	0,3941	0,3380	0,2780	0,2711
0,65	0,4788	0,3450	0,2984	0,2478	0,2417
0,60	0,4188	0,3045	0,2662	0 2234	0,2180
0,55	0,3644	0,2706	0,2395	0,2033	0,1986
0,50	0,3162	0,2421	0,2170	0,1865	0,1823
0,45	0,2744	0,2178	0,1978	0,1721	0,1685
0,40	0,2388	0,1969	0,1812	0,1598	0,1566
0,35	0,2088	0,1789	0,1667	0,1490	0,1463
0,30	0,1839	0,1631	0,1539	0,1396	0,1373
0,25	0,1631	0,1493	0,1425	0,1311	0,1293
0,20	0,1458	0,1370	0,1322	0,1236	0,1221
0,15	0,1314	0,1262	0,1230	0,1168	0,1157
0,10	0,1192	0,1165	0,1146	0,1107	0,1100
0,05	0,1088	0,1078	0,1070	0,1051	0,1048
0	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000

Примечание. $n = 2$, $\nu = 10^{-1}$, усреднение по углам

ТАБЛИЦА 3

p	$a_2/a_1 = 1$	$a_2/a_1 = 0,2$		$a_2/a_1 = 10^{-1}$		$a_2/a_1 = 10^{-3}$	
	$\sigma_1 = \sigma_2$	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9021	0,9395	0,7453	0,9444	0,6060	0,9504	0,1734
0,90	0,8044	0,8762	0,5440	0,8859	0,3706	0,9007	0,0939
0,85	0,7071	0,8094	0,3902	0,8240	0,2342	0,8510	0,0643
0,80	0,6104	0,7384	0,2764	0,7588	0,1547	0,8012	0,0488
0,75	0,5144	0,6630	0,1945	0,6908	0,1070	0,7514	0,0393
0,70	0,4198	0,5833	0,1368	0,6205	0,0772	0,7016	0,0329
0,65	0,3275	0,5005	0,0968	0,5492	0,0578	0,6519	0,0283
0,60	0,2397	0,4168	0,0694	0,4782	0,0448	0,6021	0,0248
0,55	0,1611	0,3357	0,0508	0,4087	0,0357	0,5523	0,0221
0,50	0,1000	0,2612	0,0383	0,3422	0,0292	0,5026	0,0199
0,45	0,0621	0,1967	0,0298	0,2800	0,0245	0,4528	0,0181
0,40	0,0417	0,1440	0,0240	0,2233	0,0209	0,4032	0,0166
0,35	0,0305	0,1033	0,0200	0,1729	0,0182	0,3535	0,0153
0,30	0,0238	0,0731	0,0171	0,1296	0,0161	0,3039	0,0142
0,25	0,0194	0,0514	0,0151	0,0935	0,0145	0,2544	0,0133
0,20	0,0164	0,0362	0,0135	0,0646	0,0132	0,2050	0,0125
0,15	0,0141	0,0256	0,0124	0,0427	0,0121	0,1556	0,0118
0,10	0,0124	0,0184	0,0114	0,0270	0,0113	0,1065	0,0111
0,05	0,0111	0,0134	0,0106	0,0165	0,0106	0,0577	0,0105
0	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100

Примечание. $n = 2$, $\nu = 10^{-2}$.

ТАБЛИЦА 4

P	σ^*				
	$a_2/a_1 = 1$	$a_2/a_1 = 0{,}2$	$a_2/a_1 = 10^{-1}$	$a_2/a_1 = 10^{-2}$	$a_2/a_1 = 10^{-3}$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9021	0,8793	0,5892	0,2005	0,1711
0,90	0,8044	0,7608	0,3158	0,1064	0,0932
0,85	0,7071	0,6452	0,1821	0,0730	0,0642
0,80	0,6104	0,5332	0,1196	0,0558	0,0490
0,75	0,5144	0,4262	0,0864	0,0453	0,0396
0,70	0,4198	0,3260	0,0664	0,0381	0,0333
0,65	0,3275	0,2357	0,0532	0,0328	0,0287
0,60	0,2397	0,1600	0,0438	0,0288	0,0252
0,55	0,1611	0,1040	0,0368	0,0256	0,0225
0,50	0,1000	0,0685	0,0315	0,0230	0,0203
0,45	0,0621	0,0478	0,0273	0,0208	0,0184
0,40	0,0417	0,0354	0,0239	0,0189	0,0169
0,35	0,0305	0,0277	0,0210	0,0173	0,0156
0,30	0,0238	0,0225	0,0187	0,0159	0,0145
0,25	0,0194	0,0188	0,0167	0,0146	0,0135
0,20	0,0164	0,0161	0,0149	0,0135	0,0126
0,15	0,0141	0,0140	0,0134	0,0125	0,0119
0,10	0,0124	0,0124	0,0121	0,0116	0,0112
0,05	0,0111	0,0111	0,0110	0,0108	0,0106
0	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100

Примечание. $n = 2$, $\nu = 10^{-2}$, усреднение по углам.

ТАБЛИЦА 5

P	$a_2/a_1 = 1$	$a_2/a_1 = 0{,}2$		$a_2/a_1 = 10^{-1}$		$a_2/a_1 = 10^{-2}$	
	$\sigma_1 = \sigma_2$	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9000	0,9387	0,7298	0,9435	0,5640	0,9474	0,0355
0,90	0,8000	0,8740	0,5162	0,8831	0,3094	0,8900	0,0089
0,85	0,7001	0,8048	0,3536	0,8171	0,1694	0,8280	0,0038
0,80	0,6001	0,7295	0,2343	0,7437	0,0937	0,7619	0,0021
0,75	0,5002	0,6462	0,1497	0,6611	0,0523	0,6923	0,0013
0,70	0,4002	0,5527	0,0916	0,5675	0,0290	0,6202	0,0009
0,65	0,3003	0,4462	0,0526	0,4605	0,0157	0,5469	0,0006
0,60	0,2005	0,3235	0,0270	0,3385	0,0079	0,4737	0,0005
0,55	0,1010	0,1824	0,0109	0,2038	0,0034	0,4020	0,0004
0,50	0,0100	0,0456	0,0022	0,0835	0,0012	0,3334	0,0003
0,45	0,0010	0,0092	0,0006	0,0291	0,0005	0,2692	0,0002
0,40	0,0005	0,0037	0,0003	0,0126	0,0003	0,2106	0,0002
0,35	0,0003	0,0019	0,0002	0,0064	0,0002	0,1587	0,0002
0,30	0,0002	0,0011	0,0002	0,0034	0,0002	0,1141	0,0002
0,25	0,0002	0,0007	0,0002	0,0019	0,0002	0,0771	0,0001
0,20	0,0002	0,0004	0,0001	0,0011	0,0001	0,0478	0,0001
0,15	0,0001	0,0003	0,0001	0,0006	0,0001	0,0260	0,0001
0,10	0,0001	0,0002	0,0001	0,0003	0,0001	0,0112	0,0001
0,05	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0028	0,0001
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Примечание. $n=2$, $\nu=10^{-4}$.

ТАВЛИЦА 6

P	σ^*				
	$a_2/a_1 = 1$	$a_2/a_1 = 0{,}2$	$a_2/a_1 = 10^{-1}$	$a_2/a_1 = 10^{-2}$	$a_2/a_1 = 10^{-3}$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9000	0,7471	0,5225	0,0048	0,0026
0,90	0,8000	0,5138	0,1733	0,0021	0,0014
0,85	0,7001	0,3122	0,0293	0,0013	0,0010
0,80	0,6001	0,1552	0,0038	0,0009	0,0007
0,75	0,5002	0,0477	0,0016	0,0007	0,0006
0,70	0,4002	0,0045	0,0010	0,0006	0,0005
0,65	0,3003	0,0015	0,0007	0,0005	0,0004
0,60	0,2005	0,0009	0,0006	0,0004	0,0004
0,55	0,1010	0,0006	0,0004	0,0004	0,0003
0,50	0,0100	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003
0,45	0,0010	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002
0,40	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002
0,35	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,30	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,25	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,15	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,05	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Примечание. $n = 2$, $\nu = 10^{-4}$, усредненне по углам.

ТАБЛИЦА 7

P	$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 1$	$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 0{,}2$		$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 10^{-3}$	
	$\sigma_1 = \sigma_2$	σ_1	$\sigma_2 = \sigma_3$	σ_1	$\sigma_2 = \sigma_3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9457	0,9581	0,9364	0,9600	0,9341
0,90	0,8921	0,9162	0,8743	0,9200	0,8699
0,85	0,8392	0,8743	0,8140	0,8800	0,8076
0,80	0,7871	0,8324	0,7555	0,8400	0,7475
0,75	0,7359	0,7905	0,6991	0,8000	0,6899
0,70	0,6858	0,7486	0,6451	0,7600	0,6350
0,65	0,6370	0,7068	0,5938	0,7200	0,5830
0,60	0,5896	0,6650	0,5452	0,6800	0,5343
0,55	0,5439	0,6234	0,4997	0,6400	0,4890
0,50	0,5000	0,5820	0,4574	0,6000	0,4472
0,45	0,4582	0,5408	0,4183	0,5600	0,4090
0,40	0,4188	0,4999	0,3826	0,5200	0,3743
0,35	0,3819	0,4595	0,3500	0,4800	0,3430
0,30	0,3476	0,4196	0,3207	0,4400	0,3150
0,25	0,3162	0,3805	0,2944	0,4000	0,2899
0,20	0,2876	0,3421	0,2709	0,3600	0,2675
0,15	0,2619	0,3047	0,2499	0,3200	0,2476
0,10	0,2388	0,2685	0,2313	0,2800	0,2299
0,05	0,2182	0,2335	0,2147	0,2400	0,2141
0	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000

Примечание. $n = 3$, $\nu = 0{,}2$.

ТАБЛИЦА 8

P	σ^*				
	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=0{,}2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-1}$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-2}$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-3}$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9457	0,9376	0,9355	0,9341	0,9341
0,90	0,8921	0,8766	0,8725	0,8700	0,8699
0,85	0,8392	0,8172	0,8113	0,8077	0,8076
0,80	0,7871	0,7596	0,7522	0,7476	0,7475
0,75	0,7359	0,7040	0,6953	0,6900	0,6899
0,70	0,6858	0,6506	0,6410	0,6351	0,6350
0,65	0,6370	0,5997	0,5895	0,5832	0,5830
0,60	0,5896	0,5514	0,5410	0,5345	0,5343
0,55	0,5439	0,5061	0,4956	0,4892	0,4890
0,50	0,5000	0,4638	0,4537	0,4474	0,4472
0,45	0,4582	0,4246	0,4151	0,4091	0,4090
0,40	0,4188	0,3886	0,3799	0,3744	0,3743
0,35	0,3819	0,3557	0,3480	0,3431	0,3430
0,30	0,3476	0,3258	0,3193	0,3151	0,3150
0,25	0,3162	0,2989	0,2935	0,2900	0,2899
0,20	0,2876	0,2746	0,2704	0,2676	0,2675
0,15	0,2619	0,2528	0,2497	0,2477	0,2476
0,10	0,2388	0,2333	0,2313	0,2299	0,2299
0,05	0,2182	0,2157	0,2148	0,2141	0,2141
0	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000

Примечание. $n=3$, $\nu=0{,}2$, усреднение по углам.

ТАБЛИЦА 9

P	σ^*					
	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=5$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9457	0,9408	0,9168	0,8914	0,8418	0,8342
0,90	0,8921	0,8828	0,8398	0,7975	0,7254	0,7154
0,85	0,8392	0,8263	0,7690	0,7168	0,6365	0,6262
0,80	0,7871	0,7712	0,7041	0,6473	0,5667	0,5567
0,75	0,7359	0,7179	0,6451	0,5875	0,5104	0,5011
0,70	0,6858	0,6664	0,5914	0,5357	0,4641	0,4555
0,65	0,6370	0,6168	0,5429	0,4907	0,4254	0,4176
0,60	0,5896	0,5695	0,4989	0,4513	0,3925	0,3854
0,55	0,5439	0,5245	0,4592	0,4166	0,3642	0,3579
0,50	0,5000	0,4819	0,4233	0,3858	0,3397	0,3340
0,45	0,4582	0,4420	0,3907	0,3584	0,3181	0,3131
0,40	0,4188	0,4047	0,3611	0,3338	0,2990	0,2946
0,35	0,3819	0,3701	0,3342	0,3115	0,2820	0,2782
0,30	0,3476	0,3383	0,3097	0,2913	0,2668	0,2635
0,25	0,3162	0,3091	0,2873	0,2729	0,2530	0,2503
0,20	0,2876	0,2826	0,2668	0,2560	0,2404	0,2383
0,15	0,2619	0,2586	0,2480	0,2404	0,2290	0,2275
0,10	0,2388	0,2369	0,2307	0,2259	0,2186	0,2175
0,05	0,2182	0,2174	0,2147	0,2125	0,2089	0,2084
0	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000

Примечание. $n=3$, $\nu=0{,}2$, усреднение по углам.

ТАБЛИЦА 10

P	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-1}$		$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-2}$	
	$\sigma_1=\sigma_2$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9359	0,9541	0,9202	0,9550	0,9189
0,90	0,8723	0,9082	0,8418	0,9100	0,8392
0,85	0,8093	0,8623	0,7652	0,8649	0,7614
0,80	0,7469	0,8163	0,6908	0,8199	0,6859
0,75	0,6854	0,7702	0,6192	0,7749	0,6132
0,70	0,6250	0,7241	0,5508	0,7299	0,5440
0,65	0,5659	0,6778	0,4863	0,6848	0,4790
0,60	0,5084	0,6315	0,4265	0,6398	0,4190
0,55	0,4529	0,5852	0,3720	0,5948	0,3646
0,50	0,4000	0,5388	0,3233	0,5497	0,3164
0,45	0,3502	0,4925	0,2806	0,5047	0,2746
0,40	0,3043	0,4463	0,2440	0,4597	0,2389
0,35	0,2628	0,4003	0,2130	0,4146	0,2089
0,30	0,2261	0,3548	0,1870	0,3696	0,1839
0,25	0,1945	0,3098	0,1654	0,3246	0,1632
0,20	0,1679	0,2655	0,1473	0,2796	0,1458
0,15	0,1457	0,2222	0,1323	0,2347	0,1314
0,10	0,1274	0,1799	0,1197	0,1898	0,1192
0,05	0,1124	0,1391	0,1090	0,1448	0,1088
0	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000

Примечание. $n=3$, $\nu=10^{-1}$.

ТАБЛИЦА 11

P	$\frac{a_1}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}=1$	$\frac{a_1}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=2$		$\frac{a_1}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10$		$\frac{a_1}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}=10^3$	
	$\sigma_1=\sigma_2$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9359	0,9157	0,9428	0,8216	0,9518	0,6920	0,9550
0,90	0,8723	0,8344	0,8856	0,6802	0,9032	0,5285	0,9099
0,85	0,8093	0,7561	0,8284	0,5686	0,8543	0,4273	0,8649
0,80	0,7469	0,6814	0,7712	0,4802	0,8051	0,3586	0,8198
0,75	0,6854	0,6104	0,7142	0,4098	0,7558	0,3088	0,7748
0,70	0,6250	0,5436	0,6575	0,3534	0,7063	0,2711	0,7297
0,65	0,5659	0,4812	0,6012	0,3079	0,6569	0,2416	0,6846
0,60	0,5084	0,4235	0,5457	0,2708	0,6077	0,2179	0,6396
0,55	0,4529	0,3709	0,4912	0,2402	0,5587	0,1984	0,5945
0,50	0,4000	0,3236	0,4382	0,2149	0,5102	0,1822	0,5495
0,45	0,3502	0,2816	0,3874	0,1938	0,4624	0,1683	0,5045
0,40	0,3043	0,2449	0,3392	0,1759	0,4153	0,1564	0,4594
0,35	0,2628	0,2135	0,2943	0,1608	0,3692	0,1461	0,4144
0,30	0,2261	0,1869	0,2535	0,1479	0,3244	0,1371	0,3694
0,25	0,1945	0,1647	0,2170	0,1368	0,2810	0,1291	0,3244
0,20	0,1679	0,1464	0,1852	0,1273	0,2394	0,1220	0,2794
0,15	0,1457	0,1313	0,1580	0,1190	0,2001	0,1156	0,2345
0,10	0,1274	0,1188	0,1350	0,1118	0,1633	0,1099	0,1896
0,05	0,1124	0,1086	0,1158	0,1055	0,1298	0,1047	0,1448
0	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000

Примечание. $n=3$, $\nu=0{,}1$.

ТАБЛИЦА 12

P	σ^*				
	$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=0{,}2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-1}$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-2}$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-3}$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9359	0,9240	0,9208	0,9189	0,9188
0,90	0,8723	0,8493	0,8431	0,8392	0,8392
0,85	0,8093	0,7761	0,7671	0,7615	0,7614
0,80	0,7469	0,7048	0,6932	0,6860	0,6858
0,75	0,6854	0,6357	0,6219	0,6133	0,6131
0,70	0,6250	0,5693	0,5538	0,5441	0,5439
0,65	0,5659	0,5063	0,4896	0,4791	0,4788
0,60	0,5084	0,4472	0,4300	0,4190	0,4188
0,55	0,4529	0,3926	0,3755	0,3647	0,3644
0,50	0,4000	0,3430	0,3268	0,3165	0,3162
0,45	0,3502	0,2989	0,2842	0,2746	0,2744
0,40	0,3043	0,2603	0,2474	0,2390	0,2388
0,35	0,2628	0,2270	0,2162	0,2090	0,2088
0,30	0,2261	0,1986	0,1900	0,1840	0,1839
0,25	0,1945	0,1746	0,1679	0,1632	0,1631
0,20	0,1679	0,1544	0,1495	0,1459	0,1458
0,15	0,1457	0,1373	0,1340	0,1314	0,1314
0,10	0,1274	0,1228	0,1208	0,1192	0,1192
0,05	0,1124	0,1105	0,1096	0,1088	0,1088
0	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000

Примечание. $n=3$, $\nu=0{,}1$, усреднение по углам.

ТАБЛИЦА 13

P	σ^*					
	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=5$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9359	0,9284	0,8875	0,8359	0,7125	0,6920
0,90	0,8723	0,8580	0,7840	0,7004	0,5486	0,5286
0,85	0,8093	0,7891	0,6901	0,5913	0,4447	0,4275
0,80	0,7469	0,7218	0,6061	0,5043	0,3735	0,3588
0,75	0,6854	0,6565	0,5321	0,4351	0,3217	0,3091
0,70	0,6250	0,5934	0,4675	0,3796	0,2825	0,2715
0,65	0,5659	0,5329	0,4115	0,3349	0,2516	0,2421
0,60	0,5084	0,4754	0,3632	0,2973	0,2268	0,2184
0,55	0,4529	0,4214	0,3215	0,2663	0,2063	0,1989
0,50	0,4000	0,3711	0,2856	0,2400	0,1891	0,1826
0,45	0,3502	0,3251	0,2544	0,2174	0,1745	0,1687
0,40	0,3043	0,2835	0,2274	0,1977	0,1618	0,1568
0,35	0,2628	0,2467	0,2038	0,1805	0,1508	0,1465
0,30	0,2261	0,2144	0,1831	0,1652	0,1410	0,1374
0,25	0,1945	0,1866	0,1649	0,1516	0,1324	0,1294
0,20	0,1679	0,1630	0,1487	0,1393	0,1246	0,1222
0,15	0,1457	0,1429	0,1344	0,1281	0,1176	0,1158
0,10	0,1274	0,1261	0,1216	0,1180	0,1112	0,1100
0,05	0,1124	0,1119	0,1102	0,1086	0,1054	0,1048
0	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000

Примечание. $n=3$, $\nu=0{,}1$, усреднение по углам.

ТАБЛИЦА 14

P	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=2$		$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10$		$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^2$	
	$\sigma_1=\sigma_2$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9262	0,8978	0,9352	0,7087	0,9463	0,1764	0,9504
0,90	0,8524	0,7985	0,8698	0,4954	0,8914	0,0952	0,9008
0,85	0,7787	0,7024	0,8039	0,3448	0,8349	0,0649	0,8511
0,80	0,7051	0,6099	0,7373	0,2410	0,7768	0,0492	0,8014
0,75	0,6317	0,5216	0,6699	0,1704	0,7170	0,0396	0,7517
0,70	0,5584	0,4380	0,6016	0,1224	0,6556	0,0331	0,7019
0,65	0,4856	0,3597	0,5324	0,0896	0,5929	0,0284	0,6522
0,60	0,4131	0,2875	0,4619	0,0669	0,5294	0,0249	0,6025
0,55	0,3414	0,2221	0,3904	0,0511	0,4655	0,0222	0,5528
0,50	0,2710	0,1645	0,3181	0,0398	0,4022	0,0200	0,5031
0,45	0,2029	0,1157	0,2459	0,0317	0,3401	0,0182	0,4534
0,40	0,1398	0,0770	0,1768	0,0258	0,2804	0,0166	0,4038
0,35	0,0871	0,0492	0,1164	0,0214	0,2241	0,0154	0,3542
0,30	0,0519	0,0321	0,0722	0,0182	0,1725	0,0143	0,3046
0,25	0,0330	0,0227	0,0453	0,0157	0,1266	0,0133	0,2551
0,20	0,0231	0,0175	0,0301	0,0139	0,0878	0,0125	0,2056
0,15	0,0176	0,0145	0,0213	0,0125	0,0567	0,0118	0,1562
0,10	0,0141	0,0125	0,0159	0,0114	0,0338	0,0111	0,1070
0,05	0,0117	0,0111	0,0124	0,0106	0,0188	0,0105	0,0581
0	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100

Примечание. $n=3$, $\nu=0{,}01$.

ТАБЛИЦА 15

P	σ^*				
	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=0{,}2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-1}$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-2}$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-3}$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9262	0,9095	0,9050	0,9022	0,9021
0,90	0,8524	0,8194	0,8102	0,8046	0,8044
0,85	0,7787	0,7298	0,7160	0,7073	0,7071
0,80	0,7051	0,6409	0,6224	0,6106	0,6104
0,75	0,6317	0,5531	0,5298	0,5148	0,5144
0,70	0,5584	0,4667	0,4388	0,4202	0,4198
0,65	0,4856	0,3826	0,3502	0,3280	0,3275
0,60	0,4131	0,3020	0,2660	0,2403	0,2397
0,55	0,3414	0,2272	0,1898	0,1618	0,1611
0,50	0,2710	0,1615	0,1271	0,1007	0,1000
0,45	0,2029	0,1092	0,0829	0,0626	0,0621
0,40	0,1398	0,0724	0,0557	0,0421	0,0417
0,35	0,0871	0,0490	0,0396	0,0308	0,0305
0,30	0,0519	0,0349	0,0297	0,0240	0,0238
0,25	0,0330	0,0261	0,0233	0,0196	0,0194
0,20	0,0231	0,0204	0,0189	0,0165	0,0164
0,15	0,0176	0,0164	0,0157	0,0142	0,0141
0,10	0,0141	0,0137	0,0133	0,0125	0,0124
0,05	0,0117	0,0116	0,0115	0,0111	0,0111
0	0,0100	0,0100	0,0100	0,1000	0,0100

Примечание. $n=3$, $\nu=0{,}01$, усреднение по углам.

ТАБЛИЦА 16

P	σ^*					
	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=5$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9262	0,9152	0,8449	0,7201	0,2222	0,1728
0,90	0,8524	0,8311	0,6984	0,4862	0,1157	0,0941
0,85	0,7787	0,7478	0,5633	0,3172	0,0790	0,0648
0,80	0,7050	0,6655	0,4425	0,2113	0,0604	0,0495
0,75	0,6317	0,5845	0,3389	0,1483	0,0490	0,0401
0,70	0,5584	0,5051	0,2541	0,1096	0,0413	0,0337
0,65	0,4856	0,4275	0,1877	0,0844	0,0356	0,0291
0,60	0,4131	0,3524	0,1378	0,0670	0,0312	0,0255
0,55	0,3414	0,2806	0,1015	0,0544	0,0277	0,0228
0,50	0,2710	0,2134	0,0756	0,0450	0,0249	0,0205
0,45	0,2029	0,1527	0,0573	0,0377	0,0225	0,0187
0,40	0,1398	0,1021	0,0443	0,0319	0,0204	0,0171
0,35	0,0871	0,0652	0,0349	0,0272	0,0186	0,0158
0,30	0,0519	0,0425	0,0281	0,0234	0,0170	0,0147
0,25	0,0330	0,0295	0,0229	0,0202	0,0156	0,0136
0,20	0,0231	0,0219	0,0190	0,0175	0,0143	0,0128
0,15	0,0176	0,0171	0,0159	0,0152	0,0131	0,0120
0,10	0,0141	0,0139	0,0135	0,0132	0,0120	0,0112
0,05	0,0117	0,0117	0,0116	0,0115	0,0110	0,0106
0	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100

Примечание. $n=3$, $\nu=0{,}01$, усреднение по углам.

ТАБЛИЦА 17

P	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=0{,}2$		$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-1}$		$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-3}$	
	$\sigma_1=\sigma_2$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9250	0,9470	0,9055	0,9489	0,9021	0,9500	0,9000
0,90	0,8500	0,8937	0,8113	0,8978	0,8044	0,9000	0,8001
0,85	0,7750	0,8401	0,7176	0,8464	0,7069	0,8500	0,7001
0,80	0,7001	0,7860	0,6246	0,7949	0,6098	0,8000	0,6001
0,75	0,6251	0,7314	0,5325	0,7431	0,5132	0,7500	0,5002
0,70	0,5501	0,6759	0,4417	0,6909	0,4175	0,7000	0,4002
0,65	0,4751	0,6191	0,3529	0,6378	0,3231	0,6500	0,3003
0,60	0,4001	0,5599	0,2672	0,5832	0,2314	0,6000	0,2005
0,55	0,3252	0,4968	0,1866	0,5253	0,1452	0,5500	0,1010
0,50	0,2502	0,4259	0,1151	0,4588	0,0721	0,4999	0,0101
0,45	0,1753	0,3400	0,0585	0,3738	0,0261	0,4492	0,0010
0,40	0,1005	0,2273	0,0222	0,2512	0,0078	0,3985	0,0005
0,35	0,0269	0,0841	0,0047	0,1157	0,0020	0,3480	0,0003
0,30	0,0010	0,0122	0,0007	0,0364	0,0006	0,2975	0,0002
0,25	0,0004	0,0040	0,0003	0,0140	0,0003	0,2472	0,0002
0,20	0,0002	0,0018	0,0002	0,0064	0,0002	0,1972	0,0002
0,15	0,0002	0,0009	0,0002	0,0031	0,0002	0,1473	0,0001
0,10	0,0001	0,0005	0,0001	0,0014	0,0001	0,0978	0,0001
0,05	0,0001	0,0002	0,0001	0,0005	0,0001	0,0486	0,0001
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Примечание. $n=3$, $\nu=10^{-4}$.

ТАБЛИЦА 18

p	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=2$		$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=6$		$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^2$	
	$\sigma_1=\sigma_2$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$	σ_1	$\sigma_2=\sigma_3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9250	0,8956	0,9343	0,8111	0,9424	0,0766	0,9486
0,90	0,8500	0,7940	0,8680	0,6454	0,8836	0,0197	0,8949
0,85	0,7750	0,6956	0,8010	0,5029	0,8234	0,0082	0,8387
0,80	0,7001	0,6007	0,7332	0,3830	0,7614	0,0042	0,7801
0,75	0,6251	0,5100	0,6645	0,2844	0,6972	0,0025	0,7193
0,70	0,5501	0,4238	0,5945	0,2054	0,6303	0,0016	0,6566
0,65	0,4751	0,3428	0,5231	0,1438	0,5603	0,0011	0,5923
0,60	0,4001	0,2678	0,4499	0,0970	0,4865	0,0008	0,5270
0,55	0,3252	0,1994	0,3743	0,0625	0,4084	0,0006	0,4614
0,50	0,2502	0,1386	0,2959	0,0377	0,3253	0,0004	0,3962
0,45	0,1753	0,0861	0,2138	0,0205	0,2367	0,0003	0,3323
0,40	0,1005	0,0429	0,1271	0,0092	0,1425	0,0003	0,2707
0,35	0 0269	0,0100	0,0362	0,0024	0,0478	0,0002	0,2126
0,30	0,0010	0,0006	0,0017	0,0004	0,0062	0,0002	0,1593
0,25	0,0004	0,0003	0,0006	0,0002	0,0019	0,0002	0,1120
0,20	0,0002	0,0002	0,0004	0,0002	0,0008	0,0001	0,0720
0,15	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0004	0,0001	0,0403
0,10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0177
0,05	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0044
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Примечание. $n=3$. $\nu=10^{-4}$.

ТАБЛИЦА 19

p	σ^*				
	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=0,2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-1}$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-2}$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^{-3}$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9250	0,9077	0,9030	0,9001	0,9000
0,90	0,8500	0,8157	0,8061	0,8002	0,8000
0,85	0,7750	0,7239	0,7094	0,7003	0,7001
0,80	0,7000	0,6326	0,6130	0,6004	0,6001
0,75	0,6251	0,5418	0,5168	0,5005	0,5002
0,70	0,5501	0,4520	0,4213	0,4007	0,4002
0,65	0,4751	0,3634	0,3268	0,3010	0,3003
0,60	0,4001	0,2771	0,2344	0,2013	0,2005
0,55	0,3252	0,1947	0,1467	0,1024	0,1010
0,50	0,2502	0,1195	0,0716	0,0145	0,0101
0,45	0,1753	0,0573	0,0242	0,0018	0,0010
0,40	0,1005	0,0142	0,0047	0,0008	0,0005
0,35	0,0269	0,0013	0,0010	0,0005	0,0003
0,30	0,0137	0,0005	0,0005	0,0003	0,0002
0,25	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
0,20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,15	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001
0,10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,05	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Примечание. $n=3$. $\nu=10^{-4}$, усреднение по углам.

ТАБЛИЦА 20

P	σ^*					
	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=1$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=5$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^2$	$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=10^3$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,95	0,9250	0,9136	0,8385	0,6954	0,0088	0,0029
0,90	0,8500	0,8277	0,6846	0,4296	0,0034	0,0016
0,85	0,7750	0,7426	0,5409	0,2321	0,0020	0,0011
0,80	0,7000	0,6583	0,4106	0,1137	0,0014	0,0009
0,75	0,6251	0,5750	0,2968	0,0499	0,0011	0,0007
0,70	0,5501	0,4929	0,2019	0,0161	0,0008	0,0006
0,65	0,4751	0,4122	0,1258	0,0040	0,0007	0,0005
0,60	0,4001	0,3333	0,0669	0,0017	0,0006	0,0004
0,55	0,3252	0,2564	0,0231	0,0010	0,0005	0,0004
0,50	0,2502	0,1822	0,0033	0,0007	0,0004	0,0003
0,45	0,1753	0,1112	0,0012	0,0005	0,0004	0,0003
0,40	0,1005	0,0444	0,0007	0,0004	0,0003	0,0003
0,35	0,0269	0,0023	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002
0,30	0,0010	0,0006	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002
0,25	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,15	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
0,10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0,05	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Примечание. $n=3$, $\nu=10^{-4}$, усреднение по углам.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1. Статистика случайных фильтрационных полей 5

Некоторые практические аспекты статистического моделирования фильтрационных процессов 5
Статистическая модель фильтрационного поля 9
Основные характеристики случайных фильтрационных полей 16
Эмпирические характеристики статистических моделей неоднородных сред 24

Глава 2. Стационарные одномерные течения в пористых средах со случайными неоднородностями 28

Методы исследования фильтрации в стохастических средах 29
Линейная одномерная фильтрация 31
Некоторые свойства усредненных решений задач фильтрации в стохастических средах 35

Глава 3. Стационарные квазиодномерные течения в пористых средах со случайными неоднородностями 38

Квазиодномерное плоское фильтрационное течение 38
Исследование дисперсии дебита 40
Исследование математического ожидания дебита 41
Квазиодномерное пространственное течение 47
Квазирадиальное плоское течение к скважине 48
Влияние информации о призабойной зоне скважины на точность прогноза ее дебита 54

Глава 4. Функция источника фильтрационных полей в средах со случайными неоднородностями 58

Функция источника в задаче о стационарной фильтрации на плоскости и в пространстве 59
Точечный источник поля в стратифицированной среде со случайными неоднородностями. Электрический каротаж в случайных средах . . . 61
Решение типа источника в задаче о нестационарной фильтрации жидкости в среде со случайными неоднородностями 72

Глава 5. Корреляционный и спектральный анализ элементов фильтрационного поля в средах со случайными неоднородностями 77

Корреляционный анализ элементов трехмерных фильтрационных полей в изотропных пористых средах 78
Спектральный анализ элементов трехмерных фильтрационных полей . 87
Анализ корреляций элементов плоских фильтрационных полей в средах со случайными неоднородностями 91
Корреляции элементов фильтрационных полей в анизотропных средах 91
Вихрь поля скорости фильтрации в среде со случайными неоднородностями 99

Глава 6. Эффективная проводимость неоднородных сред 103

Методы определения эффективной проводимости 103
Эффективные характеристики некоторых двумерных полей. Точные решения 110
Приближение малой концентрации. Эффективная проводимость для сред с включениями 123
Корреляционное приближение эффективной проводимости изотропного поля 128
Корреляционное приближение эффективной проводимости анизотропного поля 131

Определение самосогласованных эффективных параметров 137
Метод возмущений 146
Метод перенормировок и сингулярное приближение 149
Эффективная проводимость случайных сеток 158
Гармонический анализ эффективной проводимости 161
Вариационные методы оценки эффективных параметров 164

Глава 7. Эффективная проводимость при фильтрационном переносе многофазных систем в неоднородных пористых средах 178

Глобульная модель и осреднение уравнений фильтрации 180
Самосогласованные эффективные параметры фильтрационного переноса многофазных систем. Фазовые проницаемости 188

Глава 8. Оценка застойных зон при фильтрации в случайных средах . . 193

Определение коэффициента охвата при фильтрации ньютоновской жидкости в средах с непроницаемыми включениями 193
Фильтрация с предельным градиентом в средах со случайными неоднородностями 200

Глава 9. Дисперсия фильтрационного потока в средах со случайными неоднородностями 207

Математическое описание фильтрационной дисперсии 209
Характеристики фильтрационной дисперсии 211
Марковская модель фильтрационного переноса частиц 215
Уравнения фильтрационной дисперсии 217

Глава 10. Статистический анализ уравнений фильтрационного переноса в средах со случайными неоднородностями 223

Усреднение уравнений одномерного фильтрационного переноса . . . 224
Усреднение уравнений многомерного переноса 233
Фильтрационный перенос и дисперсия потока в средах со случайной пористостью 239
Перенос примеси полем случайной скорости фильтрации в среде со случайной пористостью 248
Функциональное описание дисперсии фильтрационного потока в неоднородных средах 256
Дисперсия неоднородной жидкости. Усреднение уравнений фильтрационного переноса многофазных систем 264
Усреднение уравнений переноса несмешивающихся жидкостей. Учет капиллярных сил 269

Список литературы 274

Приложение 276

Марк Иосифович ШВИДЛЕР

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПОРИСТЫХ СРЕД

Редактор издательства *Т. К. Лазарева*
Переплет художника *О. В. Камаева*
Художественный редактор *В. В. Шутько*
Технический редактор *Л. А. Мурашова*
Корректор *Н. Г. Гаспарьян*

ИБ № 5796

Сдано в набор 21.06.84. Подписано в печать 16.11.84. Т—21663. Формат 60×90/16. Бумага типографская № 1. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. п. л. 18,0. Усл. кр.-отт. 18,0. Уч.-изд. л. 18,9. Тираж 1650 экз. Заказ 4-242/13-6. Цена 3 р. 30 к.
Ордена «Знак Почета» издательство «Недра». 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.

Харьковская книжная фабрика «Коммунист», 310012, Харьков-12, ул. Энгельса, 11.